29e championnat des jeux mathématiques et logiques

Qualification régionale valaisanne - 19 novembre 2014

Solutions

1. Le poids du cylindre

400 + 150 = 550 g. Poids cherché : 550 – 500 = **50 g**.

2. L’année cachée

Les chiffres trouvés sont 2, 0, 1 et 4. L’année cachée est **2014**.

3. Le paquet

Longueur nécessaire : 8 · 20 + 15 = **175 cm.**

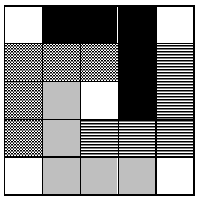
4. Les huit cases

	7	
a	b	c
5		

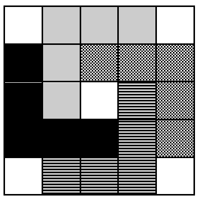
Mettons a, b et c dans les cases indiquées.
a = 1 ou 2 ou 3.
Si a = 1, b = 3 (forcément) et aucun chiffre ne joue pour c.
Si a = 2, aucun chiffre ne peut aller en b.
Si a = 3, b = 1 (forcément) et c est obligatoirement 4.
Les cases restantes sont faciles à compléter.

	7	
3	**1**	**4**
5	**8**	**6**
	2	

5. Le quadrillage



ou



6. Les chemisiers

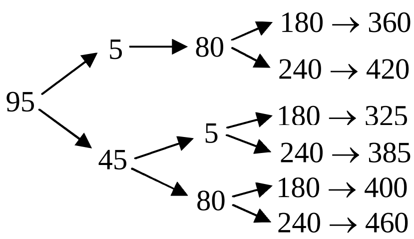
Blanche porte un chemisier rose ou violet. Rose porte un chemisier blanc ou violet. Violette porte un chemisier blanc ou rose. Violette ne porte pas un chemisier blanc car c’est sa copine qui lui répond qui porte un chemiser blanc. Alors Violette porte un chemisier rose. On peut alors savoir que c’est **Blanche qui porte un chemisier violet**. Finalement, **Rose porte un chemisier blanc**.

7. Les six nombres

Nombres possibles sur les faces opposées :

15 : 5 ou 45   20 : 5 ou 80   60 : 15, 20, 180 ou 240

A partir de 95, il faut ajouter le nombre opposé à la face portant le numéro 15 (5 ou 45), puis le nombre opposé à la face portant le numéro 20, puis le nombre opposé à la face portant le numéro 60.



Le croquis de droite donne toutes les possibilités (les nombres doivent être tous différents).

Au bout de chaque branche, on a la somme des 6 faces. La seule qui convient est **325**.

8. Les fruits

Dans le premier cas, si elle fait des paniers de 3 pommes et 4 coings, il lui restera 2 pommes et 3 coings. Pour que ces conditions soient remplies avec 1 seul panier, il lui faut 5 pommes (3 pommes dans le panier et 2 pommes restantes) et 7 coings (4 coings dans le panier et 3 coings restants). Pour que ces conditions soient remplies avec 2 paniers, il lui faut 8 pommes (6 pommes dans le panier et 2 pommes restantes) et 11 coings (8 coings dans le panier et 3 coings restants). On construit ainsi, pas à pas, le tableau suivant :

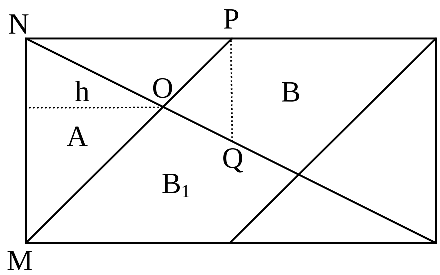
Nombre de paniers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre total de pommes	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38
Nombre total de coings	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51

On fait le même raisonnement pour le tableau suivant en prenant la seconde affirmation qui dit que si elle fait des paniers de 4 pommes et 6 coings, il lui restera 4 pommes et 1 coing. On s'arrête dès que le nombre total de pommes et de coings est identique à celui du tableau précédent, ce qui est le cas uniquement pour 32 pommes et 43 coings.

Nombre de paniers	1	2	3	4	5	6	7
Nombre total de pommes	8	12	16	20	24	28	32
Nombre total de coings	7	13	19	25	31	37	43

Marie-Aude possède **32 pommes** et **43 coings**.

9. La part de gâteau



Commençons par dessiner le gâteau sur une feuille quadrillée (1 cm = 1 carreau).

B + B_1 est un parallélogramme dont l'aire est égale à 144 cm^2 ($12 \cdot 12$).

Comme B = B1, alors l'aire de B = 72 cm^2.

Le dessin nous assure que la hauteur h correspond à 8 cm. En effet, pour aller de M à O, on avance sur les diagonales des carreaux et pour aller de N à O, chaque fois que l'on descend verticalement d'un carreau, on avance horizontalement de 2 carreaux.

Alors, aire de A : $\frac{12 \cdot 8}{2}$ = 48 cm^2. Aire de A + B = 72 + 48 = 120 cm^2.

Aire totale : $12 \cdot 24$ = 288 cm^2. Fraction du gâteau mangée par Jean : $\frac{120}{288} = \frac{5}{12}$. Solution : **5/12**.

Les « puristes » montreront que les triangles OPQ et NOM sont semblables, que le triangle NOM est deux fois plus grand que le triangle OPQ et que h est égal aux 2/3 de la longueur de NP.

10. Les nombres

Rappels : les carrés de nombres entiers sont 1, 4, 9, 16, 25, 36…

Le nombre 1 peut avoir comme voisins possibles les nombres 3, 8 et 15 car 1 + 3 = 4, 1 + 8 = 9 et 1 + 15 = 16. Le tableau suivant donne tous les voisins possibles des nombres de 1 à 15.

Nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Voisins possibles	3 8 15	7 14	1 6 13	5 12	4 11	3 10	2 9	1	7	6 15	5 14	4 13	3 12	2 11	1 10

Seuls 8 et 9 n’ont qu’un seul voisin possible. Ils doivent être aux extrémités de la liste. 8 doit être placé en premier. A ses côtés, il ne peut y avoir que le 1.

En partant de la droite, tout va s’enchaîner parfaitement. En effet, à gauche du 9, il ne peut y avoir que le 7. A gauche du 7, c’est le 2 car 9 est déjà placé. A gauche du 2 va forcément le 14. Etc.

Liste de Raphaël : 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9.

Trois premiers nombres écrits : **8, 1 et 15**.

11. Le menuisier

Chaque coupe divise un parallélépipède rectangle en deux autres parallélépipèdes rectangles. Pour simplifier, parlons de pièces au lieu de parallélépipèdes rectangles. Comme on peut déplacer les morceaux, si on a deux pièces identiques, on peut en éliminer une. Si l’une des pièces obtenues peut être (théoriquement) encastrée dans une autre, on peut éliminer la plus petite. Pour obtenir un minimum de coupes, l’idée est de partager une pièce de manière que les deux pièces obtenues aient un volume le plus proche possible. Dans l’idéal, on cherche à obtenir après chaque coupe deux pièces identiques.

Voici une possibilité de résoudre notre problème :

La pièce de départ est de dimension (3,4,10). Partageons-la (1ère coupe) pour obtenir (3,4,5) + (3,4,5). On élimine une des pièces.

2ème coupe : (3,4,5) devient (3,2,5) + (3,2,5). On élimine une des pièces.

3ème coupe : (3,2,5) devient (3,1,5) + (3,1,5). On élimine une des pièces.

4ème coupe : (3,1,5) devient (3,1,3) + (3,1,2). On élimine (3,1,2).

4ème coupe : (3,1,3) devient (3,1,2) + (3,1,1). On élimine (3,1,1).

6ème coupe : (3,1,2) devient (3,1,1) + (3,1,1). On élimine une des pièces.

Il faut encore deux coupes pour séparer (3,1,1) en trois petits cubes.

Il faut donc **8 coupes** pour obtenir 120 petits cubes.

Mon ami Jérôme Gavin propose une solution originale et géniale permettant de connaître le nombre minimum de coupes quel que soit le parallélépipède rectangle donné au départ. Vous la trouverez sur mon site, dans la rubrique C (numéro 42) : http://www.jeuxmath.ch/

12. La croix

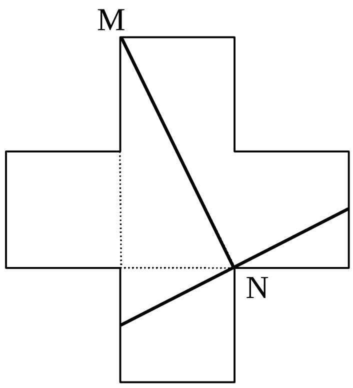
Construisons la croix en vraie grandeur, avec des côtés de 1,5 cm.

Aire de la figure : $5 \cdot 1{,}5^2 = 11{,}25$ cm^2.

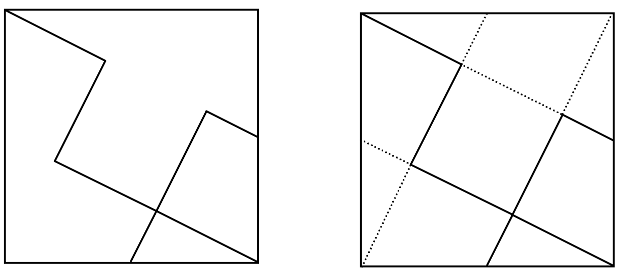
Côté du nouveau carré : $\sqrt{11{,}25} \cong 3{,}4$ cm.

Sur le dessin, le segment MN mesure environ 3,4 cm.

Vérifions-le par Pythagore : $MN^2 = 3^2 + 1{,}5^2 = 11{,}25$. Donc MN est égal à $\sqrt{11{,}25}$. MN pourrait être un des côtés du carré cherché. On s’assure que c’est bien le cas en construisant le carré.



Il est intéressant de voir le prolongement de certains traits (dessin de droite).



13. L'apéritif

On va faire comme s'il n'y avait que 2 personnes à cet apéritif, puis 3 personnes, puis 4, puis 5, etc. Pour N personnes, on va toujours commencer par voir ce qui se passe pour la N – 1 personne, puis pour la N –2 personne, puis pour la N – 3 personne, etc.

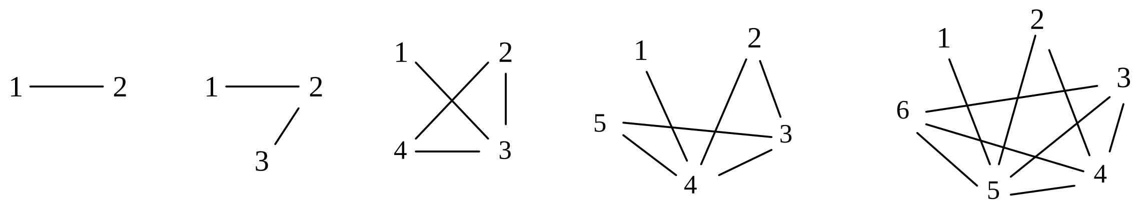
S'il n'y a que 2 personnes, la 1 trinque avec la 2 et c'est terminé.

S'il y a 3 personnes, la 2 trinque avec les 1 et 3 et c'est fini.

S'il y a 4 personnes, la 3 trinque avec les 1, 2 et 4. 1 et 3 ne peuvent plus trinquer. La 2 ne peut plus que trinquer avec la 4. Toutes les conditions sont remplies.

S'il y a 5 personnes, la 4 trinque avec les 1, 2, 3 et 5. 1 et 4 ne peuvent plus trinquer. La 3 doit encore trinquer avec les 2 et 5 (elle n'a pas d'autres choix). Toutes les conditions sont remplies.

S'il y a 6 personnes, la 5 trinque avec les 1, 2, 3, 4 et 6. 1 et 5 ne peuvent plus trinquer. La 4 doit encore trinquer avec les 2, 3 et 6 (elle n'a pas d'autres choix). 2 et 6 ne peuvent plus trinquer. La 3 doit encore trinquer avec la 6. Toutes les conditions sont remplies.



On peut compléter le tableau ci-dessous. On s'aperçoit (on peut vérifier facilement en continuant les croquis) que le nombre de fois qu'a trinqué la dernière personne est la valeur entière du nombre total de personnes divisé par 2.

Nombre total de personnes	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fois qu'a trinqué la dernière personne	1	1	2	2	3	3	4	4

Monsieur « Cent trois » a trinqué avec **51 personnes**.

14. Les vaches

Considérons l'herbe mangée comme le volume d'un parallélépipède rectangle dont la face qui touche le sol vaut respectivement 50 ares, 30 ares et 240 ares. Quelle que soit l'unité de ce volume, on peut considérer que la hauteur de l'herbe à l'arrivée des vaches est 1 et que l'herbe va continuer de pousser à raison d'une hauteur x par jour. On a alors :

10 vaches, en 10 jours, broutent $50 \cdot 1 + 50 \cdot 10 \cdot x$. (1)

18 vaches, en 2 jours, broutent $30 \cdot 1 + 30 \cdot 2 \cdot x$. (2)

y vaches, en 15 jours, broutent $240 \cdot 1 + 240 \cdot 15 \cdot x$. (3)

De (1), on tire que 18 vaches, en 10 jours, broutent $(50 + 50 \cdot 10 \cdot x) \cdot 18/10$. D'où 18 vaches, en 2 jours, broutent $(50 + 50 \cdot 10 \cdot x) \cdot 18/50$. (4)

De (4) et (2), on obtient l'équation suivante :

$(50 + 50 \cdot 10 \cdot x) \cdot 18/50 = 30 + 30 \cdot 2 \cdot x$, de laquelle on tire que $x = 1/10$.

(1) devient 10 vaches, en 10 jours, broutent 100. (5)

(3) devient y vaches, en 15 jours, broutent 600. (6)

De (5), on tire que 10 vaches, en 15 jours, broutent 150. (7)

Alors, selon (6) et (7), il faut **40 vaches** pour brouter 600 en 15 jours.