Demi – finale du 15 mars 2025

1. Évolution

Au départ, Lucas utilise un seul cube.
Après la 1e étape, il en ajoute 5 : devant, derrière, à gauche, à droite et dessus. Il en a alors 1 + 5 = 6.
Après la 2e étape, il en ajoute de nouveau 5, il en a alors 6 + 5 = 11.
Continuons ainsi. Après la 3e étape, il en aura 11 + 5 = 16.
Finalement, après la 4e étape, il aura 16 + 5 = **21 cubes**.

2. Le décor

Pour réaliser un décor, nous avons besoin de :

- 5 triangles gris
- 3 disques blancs
- 2 rectangles noirs

Il est possible de faire un deuxième décor. Nous aurons utilisé en tout :

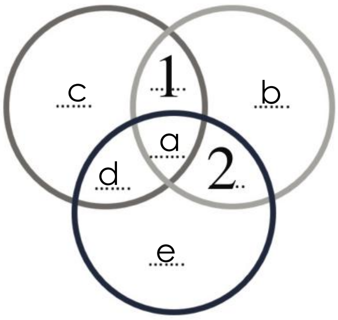
- 10 triangles gris, nous en avons 20
- 6 disques blancs, nous en avons 15
- 4 rectangles noirs, nous en avons 10

Nous pouvons faire au maximum **4 décors**. Nous aurons utilisé :

- 20 triangles gris
- 12 disques blancs
- 8 rectangles gris

Il nous reste des disques blancs et des rectangles noirs mais nous ne pouvons plus continuer car nous n'avons plus de triangles gris.

3. Équi-cercles



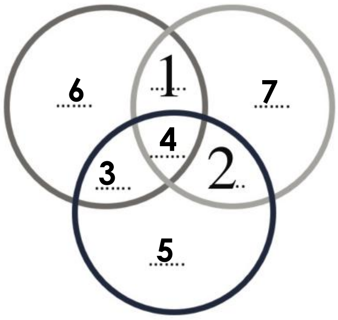
À la place du a :

- Il n'est pas possible de placer un 3 car il faudrait mettre un 8 à la place du b pour arriver à 14.
- Il n'est pas possible de placer un 7 car d et e devraient valoir 5 ensemble.
- Il n'est pas possible de placer un 6 car d et e devraient valoir 6 ensemble.
- Il n'est pas possible de placer un 5 car d et e devraient être remplacés par 3 et 4, et, b devrait valoir 4.

Donc, nous sommes sûrs que a vaut 4 et b vaut alors 7.

Nous comprenons que d et e doivent valoir 8 ensemble. Ils sont remplacés par 5 et 3.
Nous comprenons aussi que d et c doivent valoir 9 ensemble. Ils sont remplacés par 3 et 6.

Il ne reste qu'une seule possibilité :



4. Sudoku-gommettes

Nous avons représenté les 3 gommettes noires à l'aide d'un 3 dans une case grise et les 3 gommettes blanches à l'aide d'un 3 dans une case blanche.

	3	5	1
3	3		
4			
2			3

La première ligne et la première colonne contiennent 3 gommettes noires. Elles sont déjà placées, les autres gommettes seront blanches.

La deuxième colonne contient 5 gommettes noires, elles doivent être contenues dans 2 cases, nous ne pouvons pas placer 5 gommettes dans une case.

La dernière colonne contient une gommette noire, elle est obligatoirement au milieu de la colonne.

Voici la nouvelle situation :

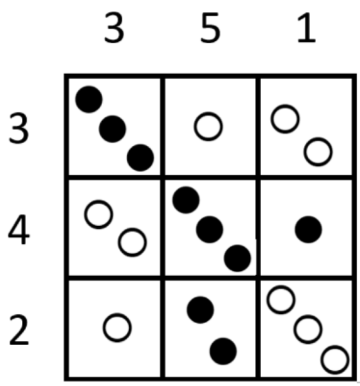
	3	5	1
3	3		
4			1
2			3

Avec toutes les indications fournies, il devient plus simple de déterminer la solution.

Dans la case centrale, il faut un 3 pour avoir 4 gommettes noires dans la deuxième ligne.

Dans la case du milieu de la troisième ligne, il faut 2 gommettes noires pour en avoir 2 dans cette ligne.

Le reste suit naturellement :



5. Pairs et impairs
La cadre contient 6 chiffres : 1, 5, 2, 0, 2 et 5.
Pour l'instant, il y a 3 chiffres pairs et 3 chiffres impairs.
Nous devons en ajouter 2 autres. Il y en aura 8.

Si nous ajoutions 2 chiffres pairs, la phrase devrait être : on compte 5 chiffres pairs et 3 chiffres impairs. Mais ce n'est pas vrai, nous avons ajouté 2 chiffres impairs.

Si nous ajoutions 1 chiffre pair et 1 chiffre impair, la phrase devrait être : on compte 4 chiffres pairs et 4 chiffres impairs. Mais ce n'est pas vrai. Nous avons ajouté 2 chiffres pairs.

La seule possibilité qui fonctionne est :
Dans ce cadre, on compte **3** chiffres pairs, et **5** chiffres impairs.

6. La Si Do
Observons les différentes possibilités en sachant que :

- Les notes qui se suivent sont différentes (ça permet de trouver les 2^{e} et 3^{e} note possible)
- La 4^{e} note doit être choisie pour que les 3 notes apparaissent et pour que la 4^{e} soit différente de la 1^{e} et de la 3^{e}

1^{e} note	2^{e} note	3^{e} note	4^{e} note
La	Si	La	Il faut un Do
		Do	Do et La pas possible donc Si
	Do	La	Il faut un Si
		Si	Si et La pas possible donc Do
Si	La	Si	Il faut un Do
		Do	Do et Si pas possible donc La
	Do	La	La et Si pas possible donc Do
		Si	Il faut un La
Do	La	Si	Si et Do pas possible donc La
		Do	Il faut un Si
	Si	La	La et Do pas possible donc Si
		Do	Il faut un La

Elle peut former **12 groupes** différents.

7. Soustraction glissante
Résolvons cette énigme de 2 manières différentes.

Construisons un tableau pour déterminer les chiffres possibles se cachant derrière les différentes lettres.

Nous savons que E ne peut valoir 0 et nous comprenons que E ne peut valoir 5 sinon M devrait valoir 0. Cela nous permet de commencer notre tableau :

E	1	2	3	4	6	7	8	9
M	6	7	8	9	1	2	3	4

Prenons 2 exemples pour comprendre la suite :
- Si E vaut 8, M vaut 3 et logiquement A vaut 1 car M – A = 2
- Si E vaut 4, nous avons utilisé une retenue dans le M des dizaines. Il ne reste plus que 8 au lieu de 9 à cet endroit. Le A vaudra 6.

E	1	2	3	4	6	7	8	9
M	6	7	8	9	1	2	3	4
A	3	4	5	6	9	0	1	2

Remarquons que le problème de retenue utilisé dans le M des dizaines se produit à nouveau pour le A des centaines. Mais il ne se produit que pour la colonne dans laquelle E vaut 6.
Cela nous permet de compléter le tableau :

E	1	2	3	4	**6**	7	8	9
M	6	7	8	9	**1**	2	3	4
A	3	4	5	6	**9**	0	1	2
D	3	4	5	6	**8**	0	1	2

Tous ces cas fonctionnent mais seule la colonne en gras contient 4 chiffres différents : 8'916 – 6'891 = 2'025.

Le nombre qui se cache derrière DAME est **8'916**.

La deuxième manière d'y arriver est de considérer que x est un nombre entre 100 et 999 correspondant à DAM et que y correspond à E.
On résout l'équation diophantienne 10x + y – (1'000y + x) = 2'025 répondant aux conditions de la consigne.

8. Les 9 pions
La somme des 9 pions vaut 45.

Nous devons en enlever 3 ou 4 dont la somme vaut 20 pour qu'il reste une somme de 25 sur la grille.

Comment pouvons-nous en enlever 3 ?
Il s'agit de prendre les jetons :
- 9, 8, 3 - 9, 7, 4 - 9, 6, 5 - 8, 7, 5

Comment pouvons-nous en enlever 4 ?
Il s'agit de prendre les jetons :

- 9, 8, 2, 1	- 9, 7, 3, 1	- 9, 6, 4, 1	- 9, 6, 3, 2
- 9, 5, 4, 2	- 8, 7, 4, 1	- 8, 7, 3, 2	- 8, 6, 5, 1
- 8, 6, 4, 2	- 8, 5, 4, 3	- 7, 6, 5, 2	- 7, 6, 4, 3

Il s'agit de ne pas tenir compte de toutes les possibilités contenant un 5 car nous voulons conserver le 5 sur la grille. Il existe donc **10 possibilités**.

9. La fraction de Mathilde
Rappelons-nous les amplifications de fractions :

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

En effet nous avons partagé notre unité en 4 fois plus de parts (12 au lieu de 3), elles sont donc 4 fois plus petites. Si nous en prenons 4 fois plus (8 au lieu de 2), cela se compense et nous obtenons la même fraction.

Nous voulons un numérateur (nombre du haut plus grand que 25 et un dénominateur (nombre du bas) plus petit que 50. Voici les possibilités :

$$\frac{2}{3} = \mathbf{\frac{26}{39}} = \mathbf{\frac{28}{42}} = \mathbf{\frac{30}{45}} = \mathbf{\frac{32}{48}}$$

Il existe **4 solutions** différentes.

10. Le puzzle circulaire
Nous savons qu'il y a une pièce centrale, un premier anneau composé d'au moins 5 pièces, un deuxième anneau contenant au moins 3 pièces de plus que le premier anneau.
La pièce centrale et les 2 premiers anneaux contiennent exactement 25 pièces.

Voici les possibilités :

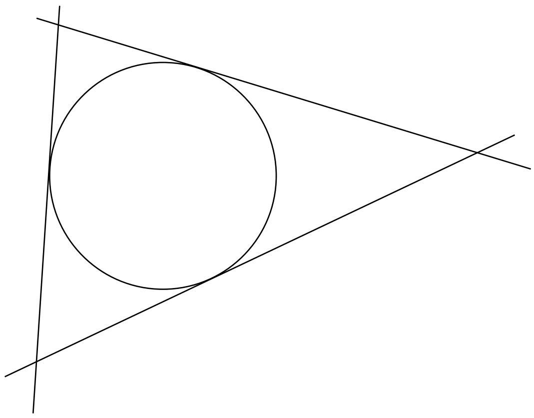
Centre	1e anneau	2e anneau	3e anneau	4e anneau
1	5	19	33	47
1	6	18	30	42
1	7	17	27	37
1	8	16	24	32
1	9	15	21	27
1	10	14	18	22

En poursuivant les constructions de ces différents puzzles (tableau ci-dessus, nous nous rendons compte qu'un seul puzzle fonctionne (d'ailleurs le bulletin-réponse précise qu'il existe une seule solution). Il s'agit du 4e puzzle présenté.
En effet :
1 + 8 + 16 + 24 + 32 + 40 + 48 + 56 + 64 + 72 + 80 + 88 + 96 = 625

Ce puzzle contient **12 anneaux**.

11. Un moyen de moyenner

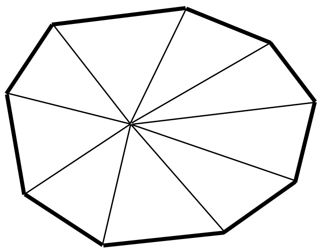
Observons le cas avec 3 droites tangentes à un cercle donné :



Nous obtenons un triangle quelconque. La somme de ces angles sera toujours la même, 180°.

Si nous réalisons la même construction avec 9 droites tangentes au cercle donné, nous obtiendrons un ennéagone (polygone à 9 côtés). La somme de ses angles sera toujours la même.

Prenons un ennéagone quelconque et cherchons la valeur de la somme de ses angles :

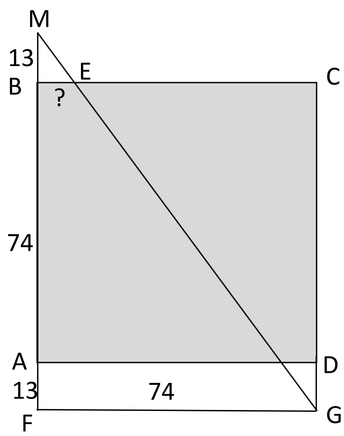


Nous avons utilisé un point de l'ennéagone pour construire 9 triangles.
Si nous additionnons la somme de tous les angles de ces 9 triangles, nous obtenons : 9 · 180° = 1'620°.
Cela ne correspond pas à la somme des angles de l'ennéagone car nous avons additionné la mesure de tous les angles dont le sommet est le point choisi dans l'ennéagone. La somme de ces angles est de 360°.
Donc 1'620° – 360° = 1'260° est la somme des angles de l'ennéagone.

Un angle moyen dans un ennéagone est de 1'260° : 9 = **140**°.

12. Carré et trapèzes

Construisons un dessin pour illustrer la situation (pour des raisons de symétrie, nous pouvons facilement prolonger la droite qui coupe le carré) :



On constate que le triangle MFG est un agrandissement du triangle MBE.

Pour passer de MF à MB, on divise par 100, puis on multiplie par 13.
Faisons la même chose pour passer de FG à BE :
74 cm : 100 = 0,74 cm, puis 0,74 cm · 13 = **9,62 cm**.

13. Drôle de somme de carrés

Le corrigé ne sera pas évident pour les 10H qui n'ont pas encore appris à résoudre des équations et factoriser des expressions littérales mais tout devrait être compréhensible.

Nous savons que : $a^2 + b^2 = 100a + b$
Nous en déduisons que : $a^2 + b^2 - a^2 - b = 100a + b - a^2 - b$
Ce qui nous permet d'écrire que : $b^2 - b = 100a - a^2$
Cela revient à dire que : $b(b - 1) = a(100 - a)$
Notons que $b(b - 1)$ est obligatoirement pair donc a doit être pair.

Lorsque nous effectuons une multiplication, il est possible de trouver facilement le chiffre des unités : 4'127 · 12'603 se terminera par 1 car 7 · 3 = 21.

Observons cela dans un tableau :

<table>
<tr><th>a</th><th>100 – a</th><th>a(100 – a)</th><th>b</th><th>b – 1</th><th>b(b – 1)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">0</td><td rowspan="4">0</td><td rowspan="4">0</td><td>0</td><td>9</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">6</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>8</td><td>7</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td><td>4</td><td colspan="3">Impossible</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td><td>4</td><td colspan="3">Impossible</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">6</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>8</td><td>7</td><td>6</td></tr>
</table>

Notre recherche est déjà bien filtrée. Listons les a possibles :

a	a(100 – a)	a	a(100 – a)	a	a(100 – a)
10 ou 90	900	28 ou 72	2016	42 ou 58	2436
12 ou 88	1056	30 ou 70	2100	48 ou 52	2496
18 ou 82	1476	32 ou 68	2176	50	2500
20 ou 80	1600	38 ou 62	2356	92	736
22 ou 78	1716	40 ou 60	2400	98	196

Il s'agit maintenant de trouver 2 nombres consécutifs : b – 1 et b tels que leur produit possède la même valeur que a(100 – a).

Après une petite recherche, dans laquelle nous utiliserons intelligemment notre premier tableau pour cibler nos calculs ($32 \cdot 33 = 1056$, $37 \cdot 38 = 1406$, $42 \cdot 43 = 1806$, $47 \cdot 48 = 2256$), nous trouvons que la seule possibilité qui fonctionne est : b = 33.
Donc b = 33 et a = 12 ou a = 88.

Nous trouvons les **2 solutions : 1233 et 8833**.

14. Carré de carrés
La première ligne et la première colonne contiennent un carré parfait qui se terminera obligatoirement par 0, 1, 4, 9 ou 6. Le 0 est à exclure selon la consigne.

Dans la dernière ligne et dans la dernière colonne, nous cherchons donc des carrés parfaits à 4 chiffres commençant par 15, 45, 95 ou 65.

C'est le cas de : $39^2 = 1521$ et $81^2 = 6561$.
Nous ne pouvons pas conserver 1521 car sinon nous devrions trouver des carrés parfaits se terminant par 2 dans la troisième ligne ou dans la troisième colonne.

Notre carré se remplit de cette manière :

	2		6
2	0	2	5
	2		6
6	5	6	1

Nous cherchons des carrés parfaits ayant cette forme _ 2 _ 6.
Il en existe 2 : $36^2 = 1296$ et $96^2 = 9216$.
Il est possible de les placer les 2 dans la première ligne et de compléter le carré.
Il existe donc **2 solutions : 1296 et 9216**.

15. Surpassez-vous
Nous nommerons x notre premier entier positif et y le second.
La consigne nous apprend que :

$$\begin{cases} x = 5y + 31 \\ xy = x + y + 2249 \end{cases}$$

Nous en déduisons successivement que :

$$\begin{cases} x = 5y + 31 \\ 5y^2 + 31y = 5y + 31 + y + 2249 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5y + 31 \\ 5y^2 + 25y - 2280 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 5y + 31 \\ y^2 + 5y - 456 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 5y + 31 \\ (y + 24)(y - 19) = 0 \end{cases}$$

Nous cherchons des solutions positives donc y vaut 19.
Le x associé vaut $5 \cdot 19 + 31 = 126$.
Nous en déduisons **la solution : (126 ; 19)**.

16. Les propriétés de mon triangle
Les côtés du triangle suivent une progression arithmétique de raison r.
Postulons que x représente la longueur du côté AB. Nous en déduisons que la longueur du côté AC est de x + r et celle de BC est de x + 2r.

Commençons par utiliser l'égalité fournie :
$x(x + 2r)^2 = (x + r)^3 + 11r^3$

En travaillant cette égalité, nous en déduisons successivement que :
$x^2r + xr^2 - 12r^3 = 0$
$x^2 + rx - 12r^2 = 0$
$(x + 4r)(x - 3r) = 0$

x et r représentent des longueurs donc ces variables sont positives.
Nous comprenons que AB, AC et BC ont une valeur de 3r, 4r et 5r.
Nous avons un triangle rectangle (Pythagore l'atteste) qui sera semblable à celui dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 5 cm.

L'aire de ce fameux triangle rectangle est de 6 cm². L'aire du triangle considéré dans cet exercice est 100 fois plus grande. Cela signifie que la mesure des côtés est 10 fois plus grande.
Le côté BC a donc **une longueur de 50 cm**.

17. Les boîtes à nombres
Prenons n = 23 et analysons ce qui se passe :

Contenu de la boîte n	+	Contenu de la boîte n + s(n)	=	Contenu de la boîte n + s(n) + s(n + s(n))
23		28		38
28		38		49
38		49		62
49		62		70
62		70		77

Nous comprenons que, peu importe le n choisi initialement, si nous connaissons le contenu des boîtes n et n + s(n), nous pouvons en déduire le contenu des boîtes de toute la série obtenue en suivant le principe d'une suite de Fibonacci.

Il s'agit de construire certaines suites intéressantes en tenant compte que :

- Les boîtes 1 et 2 contiennent des entiers strictement positifs
- La boîte 7 contient le nombre 13

Prenons n = 1 et construisons la suite obtenue à l'aide du tableau ci-dessus :
1 2 4 8 16 23 28 38 49 62 70 77 91 101 103 107
Prenons n = 7 et cherchons la même suite :
7 14 19 29 40 44 52 59 73 83 94 107

Les boîtes 107 contiennent forcément le même nombre dans les 2 suites.
Les 2 suites se poursuivront avec la boîte 115 qui contiendra le même nombre.
Les boîtes 103 et 94 doivent contenir le même nombre (celui contenu dans la boîte 115 moins celui contenu dans la boîte 107).
Ce raisonnement se poursuit donc la boîte 7 et la boîte 16 contiennent le même nombre : 13.

Après quelques essais, nous trouvons 2 possibilités de remplir les boîtes 1 et 2 pour avoir 13 dans la boîte 16.

Boîte 1	Boîte 2	Boîte 4	Boîte 8	Boîte 16 et 7
5	1	6	7	13
2	3	5	8	13

Notre objectif est de trouver le contenu de la boîte 64.
Prenons n = 64 et regardons où cela nous mène :
64 74 85 98 115

Nous l'avons évoqué. Cette boîte est celle qui suivra la boîte 107 dans nos 2 premières suites.
Nous comprenons en comparant cette suite avec la première obtenue que les boîtes 98 et 107 contiennent le même nombre tout comme les boîtes 85 et 103, 74 et 101, 64 et 91.

Reprenons les contenus possibles des boîtes 1 et 2 et cherchons le contenu de la boîte 91. Cela nous permettra de conclure :

1	2	4	8	16	23	28	38	49	62	70	77	91
5	1	6	7	13	20	33	53	86	139	225	364	589
2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Il existe **2 solutions** possibles : la boîte n°64 contient le nombre **589** ou **610**.

18. Triangles de Brahmagupta

Il existe de nombreux triangles de Brahmagupta tels que le triangle dont les côtés mesurent 2'701, 2'702 et 2'703. Heureusement, notre objectif est de nous limiter à ceux dont le périmètre est inférieur à 2'025.
Ignorons les équations de Pell-Fermat qui auraient pu nous aider et présentons la recherche de nos triangles de Brahmagupta sous forme de carte (toutes nos variables sont des nombres naturels) :

Par Héron, on sait que l'aire du triangle de côté intermédiaire x vaut : $\sqrt{\frac{3x^2(x+2)(x-2)}{16}}$ qui doit être un entier (x doit donc être pair) et son périmètre vaut 3x, avec x < 675

x = 2y

L'aire du triangle vaut : $\sqrt{3y^2(y+1)(y-1)}$ qui doit être un entier (y ± 1 doit être un multiple de 3) et son périmètre vaut 6y avec y < 338

y + 1 = 3z

z(3z – 2) doit être un entier, le périmètre du triangle vaut 18z – 6, avec z < 113

y – 1 = 3z

z(3z + 2) doit être un entier, le périmètre du triangle vaut 18z + 6, avec z < 113

Existe-il des diviseurs communs (autre que 1) à z et 3z ± 2 ?
3z étant un multiple de z, la seule réponse possible est 2
Donc, soit z est impair, z et 3z ± 2 sont premiers entre eux, chacun doit être un carré parfait.
Soit z = 2u, le périmètre vaut 36u ± 6, u et 3u ± 1 sont premiers entre, chacun doit être un carré parfait, avec u < 57

z = w²

w = 1, z = 1, 3z – 2 = 1, ok mais c'est notre exemple : à ne pas considérer
w = 3, z = 9, 3z – 2 = 25, ok et **p=156**
w = 5, z = 25, 3z – 2 = 73, pas ok
w = 7, z = 49, 3z – 2 = 145, pas ok
w = 9, z = 81, 3z – 2 = 241, pas ok et fin car z < 113

z = w²

w = 1, z = 1, 3z + 2 = 7, pas ok
w = 3, z = 9, 3z + 2 = 29, pas ok
w = 5, z = 25, 3z + 2 = 77, pas ok
w = 7, z = 49, 3z + 2 = 149, pas ok
w = 9, z = 81, 3z + 2 = 245, pas ok et fin car z < 113

u = w²

w = 1, u = 1, 3u – 1 = 2, pas ok
w = 2, u = 4, 3u – 1 = 11, pas ok
w = 3, u = 9, 3u – 1 = 26, pas ok
w = 4, u = 16, 3u – 1 = 47, pas ok
w = 5, u = 25, 3u – 1 = 146, pas ok
w = 6, u = 36, 3u – 1 = 107, pas ok
w = 7, u = 49, 3u – 1 = 146, pas ok et fin car u < 57

w = 1, u = 1, 3u + 1 = 4, ok et **p = 42**
w = 2, u = 4, 3u + 1 = 13, pas ok
w = 3, u = 9, 3u + 1 = 28, pas ok
w = 4, u = 16, 3u + 1 = 49, ok et **p = 582**
w = 5, u = 25, 3u + 1 = 148, pas ok
w = 6, u = 36, 3u + 1 = 109, pas ok
w = 7, u = 49, 3u + 1 = 148, pas ok et fin car u < 57

Il existe **3 solutions**, le périmètre vaut **42, 156 ou 582**.