Demi – finale du 16 mars 2024

1. Color-cases

La consigne nous demande de colorier une case par ligne et nous dit qu'en additionnant les trois nombres coloriés, nous devons obtenir 15.

Tentons de colorier le 1.
Nous n'arriverons jamais à obtenir 15 en coloriant un nombre dans la 2e ligne et un nombre dans la 3e ligne.

Recommençons en coloriant le 4.
Cela peut fonctionner si nous colorions dans les deux autres lignes :

- Le 9 et le 2,
- Le 5 et le 6,
- Le 3 et le 8.

La consigne nous apprend également que nous devons colorier une case par colonne, il ne reste alors qu'une possibilité :

1	4	7
9	5	3
6	8	2

2. Moitié-moitié

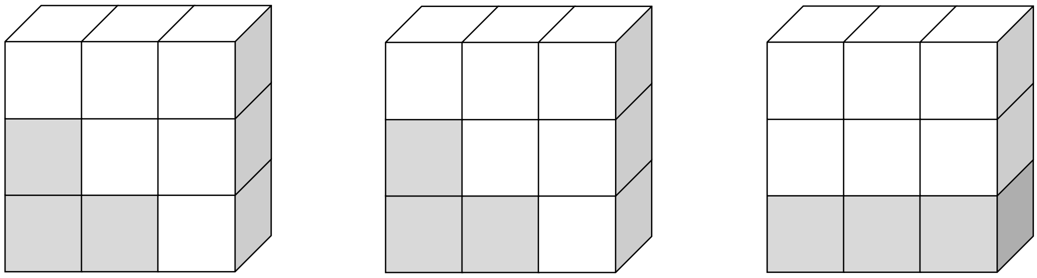
Parcourons le chemin de Sam en sens inverse.

Il rencontre Bob et lui donne la moitié de ses pommes.
Il a donc partagé sa quantité de pommes en deux parties égales.
Il garde une partie pour lui, ses 5 pommes.
Il donne l'autre partie à Bob, 5 pommes également.
Il avait 10 pommes avant de rencontrer Bob (ses 5 pommes et les 5 pommes données).

En recommençant ce raisonnement pour sa rencontre avec Alya (il garde 10 pommes et il lui donne 10 pommes), nous comprenons que Sam avait acheté **20 pommes** au marché.

3. De A à Z

Observons la construction tranche par tranche en commençant par l'avant et en terminant par l'arrière.
Pour chaque tranche, nous représenterons en gris les cubes déjà placés par Zoé et en blanc les cubes manquants pour obtenir la construction d'Alix.



Avant Centre Arrière

Il manque à Zoé les cubes en blancs, c'est-à-dire **18 cubes**.

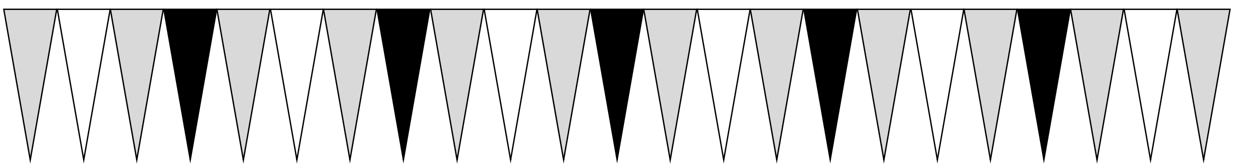
4. Les gâteaux d'anniversaire
Nous pouvons faire quelques essais pour déterminer le prix du gâteau et celui de la tartelette. Nous fixerons le prix du gâteau. Nous pourrons alors déterminer le prix de la tartelette grâce à la 1ère vitrine. Cela nous permettra de vérifier si le prix de la 2e vitrine est le bon.

Représentons cela avec un tableau :

1ère vitrine		2e vitrine
Prix du gâteau	Prix de la tartelette	
1 franc	7 francs	22 francs
2 francs	6 francs	20 francs
3 francs	5 francs	18 francs
4 francs	4 francs	16 francs
5 francs	3 francs	14 francs

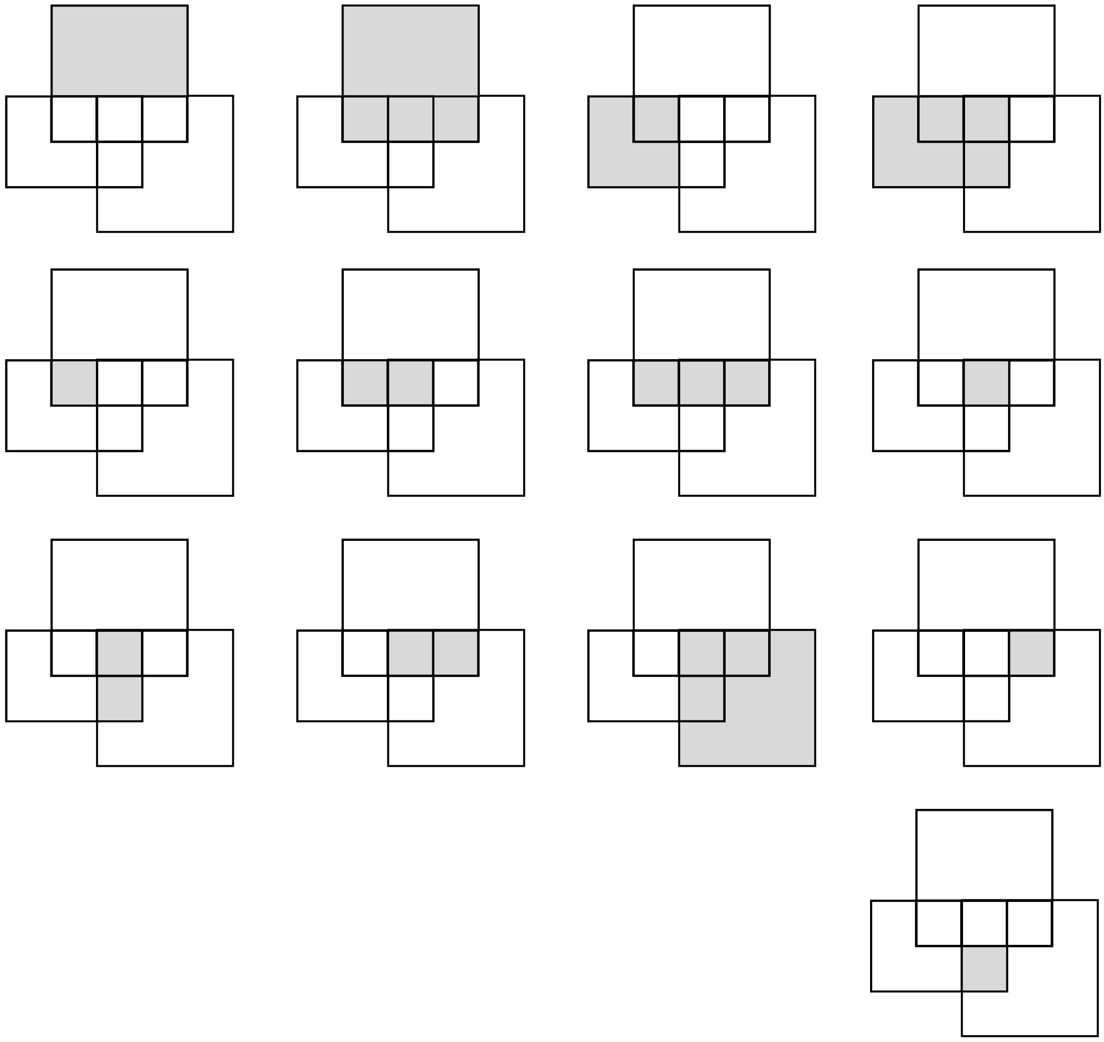
Nous pouvons nous arrêter car la dernière ligne correspond à notre situation.
Nous déterminons alors le prix de la 3e vitrine : **11 francs** (5 + 3 + 3).

5. La guirlande d'anniversaire
Antoine répète un motif qui contient 2 triangles gris.
Il a collé 12 triangles gris. Il lui a fallu 6 motifs pour y parvenir (12 ÷ 2).
La consigne est précise il s'arrête lorsqu'il colle le 12e triangle gris.
Il n'a donc pas collé le triangle noir qui aurait terminé son 6e motif.
Voici le résultat de son collage :



Il a utilisé **23 triangles** en tout.

6. Les rectangles
Colorions ces rectangles en étant méthodique pour ne pas en oublier :



Nous dénombrons **13 rectangles** différents.

7. Carrés en série
Lors de chaque nouvelle étape, nous prenons chaque carré blanc obtenu à la fin de l'étape précédente pour le transformer en 3 carrés blancs et 1 carré noir.

Nous le voyons dans la donnée. À la fin de la deuxième étape (le mardi), nous avons 3 carrés blancs. Chacun de ces carrés génère 3 nouveaux carrés blancs (il y a donc 9 carrés blancs qui viennent d'être construits) et 1 carré noir (il y a donc 3 carrés noirs qui viennent d'être construits).

Construisons un tableau que nous complèterons facilement en ayant compris cela :

Jour	Nouveaux carrés noirs	Carrés blancs
Lundi	0	1
Mardi	1	3
Mercredi	3	9
Jeudi	9	27
Vendredi	27	81

En cinq jours, Julia a obtenu **40 carrés noirs** (1 + 3 + 9 + 27).

8. Les piles
Présentons ce qui semble être la meilleure option.

Dans un premier temps, nous testons les piles par paire (1 et 2, 3 et 4, 5 et 6).
Il existe 2 possibilités :

- La lampe s'allume 2 fois (cas décrit par la consigne),
- La lampe s'allume 1 fois (cas moins favorable).

Nous devons travailler sur le cas de figure moins favorable.
Partons du principe que la lampe s'est allumées avec les piles 1 et 2 (les autres possibilités conduisent au même raisonnement) :

- La pile 1 et la pile 2 fonctionnent,
- Soit la pile 3, soit la pile 4 ne fonctionne pas,
- Soit la pile 5, soit la pile 6 ne fonctionne pas.

Pour déterminer si c'est la pile 3 ou la pile 4 qui ne fonctionne pas, nous pouvons procéder ainsi (il s'agira de notre 4^{e} essai) : nous plaçons la pile 1 (qui fonctionne) et la pile 3 dans la lampe de poche.

- Si elle ne s'allume pas, la pile 3 ne fonctionne pas et la pile 4 fonctionne.
- Si elle s'allume, la pile 3 fonctionne et la pile 4 ne fonctionne pas.

Un 5^{e} essai avec les piles 1 et 5 nous permet de déterminer si c'est la pile 5 ou la pile 6 qui est défectueuse.

Il reste tout de même une question : pouvons-nous faire mieux ?
Si nous mettons les piles 5 et 6 dans la lampe et qu'elle ne s'allume pas, il existe 9 cas possibles (piles défectueuses : 5 et 6, 1 et 5, 2 et 5, 3 et 5, 4 et 5, 1 et 6, 2 et 6, 3 et 6, 4 et 6).
Chaque nouvel essai nous permettra de déterminer plus précisément lequel de ces 9 cas est le bon. Voici ce que nous pouvons obtenir si nous faisons les meilleurs choix :

<table>
<tr><th rowspan="2">Nbre de cas</th><th colspan="2">2e essai</th><th colspan="2">3e essai</th><th colspan="2">4e essai</th></tr>
<tr><th>Lampe</th><th>Nbre de cas</th><th>Lampe</th><th>Nbre de cas</th><th>Lampe</th><th>Nbre de cas</th></tr>
<tr><td rowspan="8">9</td><td rowspan="4">Allumée</td><td rowspan="4">5</td><td rowspan="2">Allumée</td><td rowspan="2">3</td><td>Allumée</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Eteinte</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Eteinte</td><td rowspan="2">2</td><td>Allumée</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Eteinte</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Eteinte</td><td rowspan="4">4</td><td rowspan="2">Allumée</td><td rowspan="2">2</td><td>Allumée</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Eteinte</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Eteinte</td><td rowspan="2">2</td><td>Allumée</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Eteinte</td><td>1</td></tr>
</table>

Nous constatons que si nous n’avons pas de chance, il est impossible de se retrouver avec un cas de figure unique. Nous ne pouvons pas être sûr de nous en 4 essais, il pourra toujours rester 2 possibilités.

Il faudra au moins **5 essais** pour y parvenir dans le pire des cas.

9. Le calcul de Mathias

Commençons par comprendre la consigne avec un exemple.
Si A vaut 9, l’expression fournie 99 x 99 + 99 + 99 = 9'999 qui est un nombre à 4 chiffres. Cela ne nous intéresse pas car si A vaut 9, il nous faudrait un nombre à 9 chiffres pour répondre à la question.

Construisons un tableau :

La lettre A vaut	L’expression vaut	Qui est un nombre à
1	143	3 chiffres
2	528	3 chiffres
3	1’155	4 chiffres
4	2’024	4 chiffres

Nous en déduisons que si A vaut 5, 6, 7 ou 8, nous obtiendrons une expression qui est un nombre à 4 chiffres (un nombre entre 2'024 et 9'999).

Au vu de la donnée, le seul cas qui nous intéresse est celui où A vaut 4.

Il nous suffit de suivre la consigne en divisant 2'024 par 4 pour déterminer la solution qui est **506**.

10. Un peu de cuisine

L'opération en colonne qui nous intéresse est la suivante :

	R	I	Z
	S	E	L
+	W	O	K
2	0	2	4

Concentrons-nous sur :

- R + S + W que nous nommerons x,
- I + E + O que nous nommerons y,
- Z + L + K que nous nommerons z.

Et n'oublions pas de constater que :

- Ces 3 nombres utilisent 9 chiffres différents parmi les 10 possibles,
- La somme de 3 chiffres différents vaut, au minimum, 3,
- La somme de 3 chiffres différents vaut, au maximum, 24,
- La somme de tous les chiffres de 0 à 9 vaut 45,
- Lorsque nous réalisons une opération en colonne, nous devons tenir compte des retenues.

Cela nous permet de construire les différents cas de possibles :

x	y	z	x + y + z
19	12	4	35
19	11	14	44
19	10	24	53
18	22	4	44
18	21	14	53
18	20	24	62

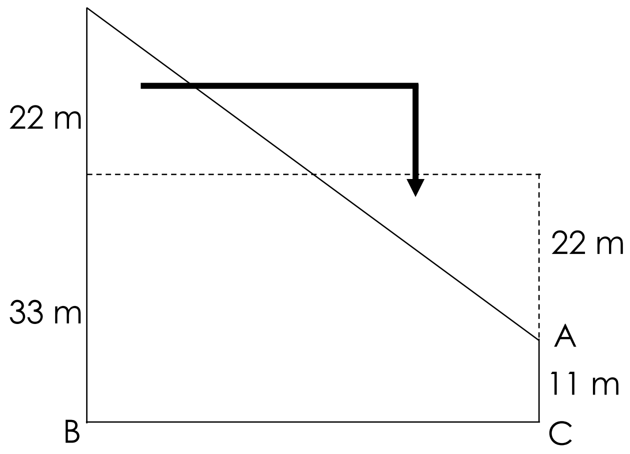
Dans les 2^{e} et 4^{e} ligne, en additionnant tous les 9 chiffres, nous obtenons 44. Cela nous apprend que parmi les 10 chiffres, seul le 1 n'a pas été utilisé car en les utilisant tous, nous devons obtenir 45.
La 1ère ligne n'est pas acceptable car le chiffre non utilisé serait le 10, or ce n'est pas un chiffre.
Les 3^{e}, 5^{e} et 6^{e} lignes ne sont pas acceptables car la somme de 9 chiffres différents ne peut pas être supérieure à 45.

Nous pouvons conclure que **le chiffre 1** n'est pas utilisé.

Notons qu'il existe un autre chemin qui mène très directement vers la réponse en utilisant la preuve par 9.

11. Le terrain du Père Métrope
L'aire du champ rectangulaire est de 5 x 2'024 m² = 10'120 m².
Or nous connaissons sa longueur qui est de 184 m. nous pouvons déterminer sa largeur qui est de 10'120 m² : 184 m = 55 m.

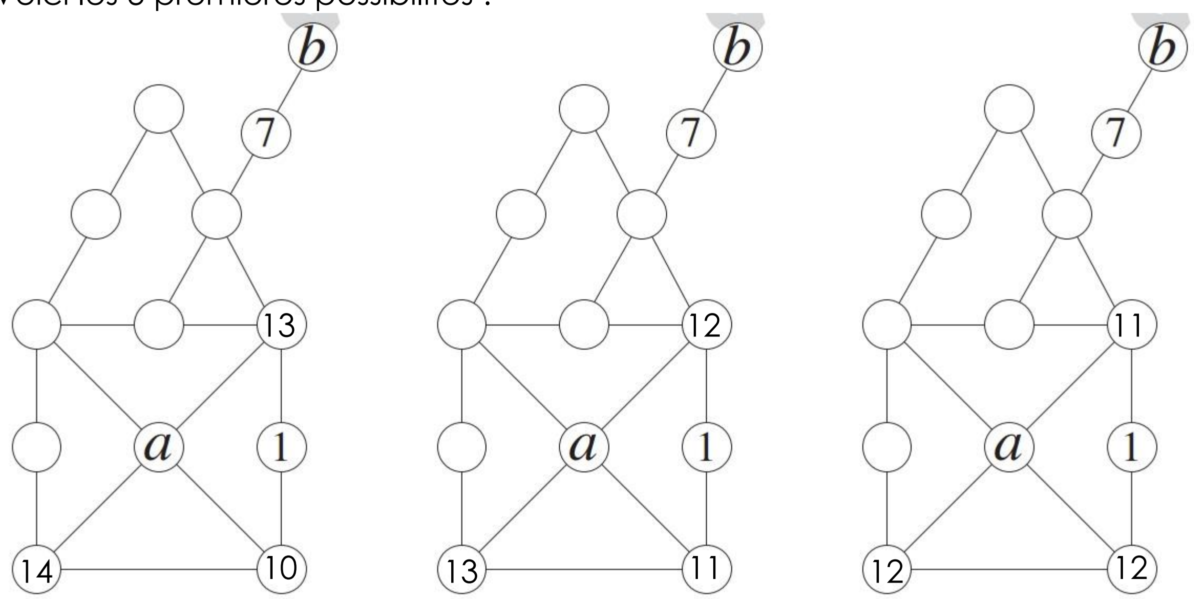
Travaillons sur le trapèze qui nous intéresse :



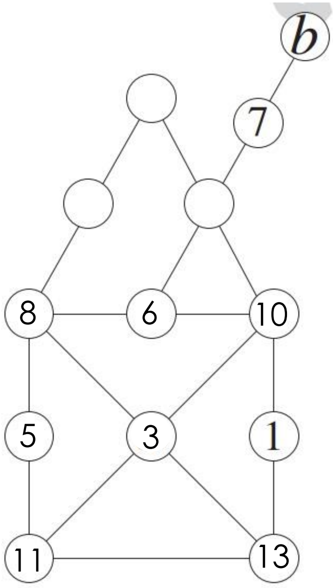
Nous pouvons le transformer en un rectangle d'aire équivalente et nous constatons que cette aire est obtenue en multipliant la longueur de BC par 33 m.

Nous en déduisons que la longueur de BC vaut 2'024 m² : 33 m = $61,\overline{3}$ m.
En arrondissant à l'unité, nous obtenons **61 m**.

12. La maison du Père Noel
Commençons par compléter la ligne verticale contenant le 1 (la somme des nombres contenus dans les deux cases manquantes doit valoir 23).
Il existe 4 possibilités que nous allons développer ci-dessous en remplissant toutes les cases qui s'obtiennent simplement.
Voici les 3 premières possibilités :



La somme des nombres composant la diagonale contenant a ne peut plus valoir 24 pour les deux premières maisons.
Le 12 apparaît deux fois dans la troisième maison.
La 4e possibilité est la suivante :



Il nous reste 2, 4, 9 et 12 à placer. Or il manque 14 unités dans la diagonale du 10 (obligatoirement 2 et 12) et il manque 16 unités dans la diagonale du 8 (obligatoirement 4 et 12). Cela nous permet de conclure que le 12 doit être placé au sommet du toit. Le 9 est le dernier nombre non-utilisé, il va dans la case b et tout fonctionne.

Nous trouvons ainsi que **a = 3 et b = 9**.

13. Bravo à tous
Nous constatons que le chiffre des centaines et celui des milliers est le même dans les deux termes. Cela nous permet d'en déduire un certain nombre d'informations :

X	R	A	Remarque
9	4	9	Impossible, X = A
8	9	4	Pas de retenue due aux dizaines, retenue due aux milliers
7	3	8	Retenue due aux dizaines, pas de retenue due aux milliers
6	8	3	Pas de retenue due aux dizaines, retenue due aux milliers
5	2	7	Retenue due aux dizaines, pas de retenue due aux milliers
4	7	2	Pas de retenue due aux dizaines, retenue due aux milliers

N'oublions pas que G et B ne peuvent pas valoir 0 et tentons de maximiser le nombre GRAND.

- G ne peut pas valoir 9 ou 8 car X vaut au maximum 8.
- Si G vaut 7, X vaut 8 mais cela est impossible à cause de la retenue due aux milliers et B qui doit valoir au moins 1.

- Si G vaut 6, B vaut 1 (sinon nous avons le même problème que dans la ligne précédente), et X vaut 8 ou 7.
  - Si X vaut 8, il reste 0, 2, 3, 5 et 7 aux places de N, D, V et O (on se convainc vite que c'est impossible)
  - Si X vaut 7, il reste 0, 2, 4, 5 et 9 aux places de N, D, V et O (on se convainc vite que c'est impossible)
- Si G vaut 5, X peut valoir 8 ou 7 (6 est à exclure à cause de la retenue due aux milliers)
  - Si X vaut 8, B vaut 2 et les valeurs restantes pour les chiffres des dizaines et unités ne permettent pas de conclure
  - Si X vaut 7, B vaut 2 et les valeurs restantes pour les chiffres des dizaines et unités ne permettent pas de conclure
- Si G vaut 4, tentons de maximiser R
  - Si R vaut 9, A vaut 4 or G vaut 4 également
  - Si R vaut 8, il est possible de conclure en maximisant GRAND :

	4	8	3	5	9
+	1	8	3	0	7
	6	6	6	6	6

GRAND vaut **48'359**.

14. Un quadrilatère croisé

Postulons que la longueur en mètres de AB mesure x et celle de BD y.
Nous en déduisons que la longueur en mètres de AC mesure x + 2 et celle de CD y – 4.

Grâce au théorème de Pythagore, nous pouvons affirmer que :

$8^2 + 21^2 = 505 = x^2 + y^2 = (x + 2)^2 + (y - 4)^2$

De cette dernière égalité, nous en déduisons que : $x = 2y - 5$

D'où par substitution : $(2y - 5)^2 + y^2 = 505$

Cela nous conduit à une seule valeur de y positive possible : 12.
Nous en déduisons les valeurs de :

- x : 19 ($2 \cdot 12 - 5$).
- x + 2 : 21 (19 + 2)
- y – 4 : 8 (12 – 8)

Il nous suffit d'additionner les longueurs de AB, BD, DC et CA :
19 m + 12 m + 8 m + 21 m et nous trouvons le périmètre du quadrilatère croisé ABDC : **60 mètres**.

15. Les fractions égyptiennes

Une fraction égyptienne est la somme obtenue en additionnant des fractions dont le dénominateur vaut toujours 1 et les dénominateurs sont des nombres naturels tous différents les uns des autres.

Dans notre cas de figure, nous avons : $\frac{2}{85} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}$

Nous en déduisons que : $2ab = 85a + 85b$

D'où : $b = \frac{85a}{2a-85}$

Il s'agit de trouver les différents couples de solutions à cette équation diophantienne.

Notons que a doit valoir plus de 42 sinon b serait négatif.

Notons que si a vaut 85, b vaut 85 (ce qui ne nous intéresse pas car il faut des dénominateurs différents) donc la recherche s'arrête là car nous allons forcément trouver des solutions qui sont symétriques de celles déjà déterminées.

Précisons finalement que 2a – 85 doit être un diviseur de 85a (donc tous les facteurs premiers de 2a – 85 doivent être des facteurs premiers de 85a), cela nous fera gagner du temps lors de notre recherche qui est synthétisée à l'aide du tableau ci-dessous (s'il y a un bug avec un facteur premier de 2a – 85, il est relevé) :

a	2a – 85	bug
43	1	non
46	7	7
49	13	13
52	19	19
55	25	non
58	31	31
61	37	27
64	43	43
67	49	7
70	55	11
73	61	61
76	67	67
79	73	73
82	79	79

a	2a – 85	bug
44	3	3
47	9	3
50	15	3
53	21	3
56	27	3
59	33	3
62	39	3
65	45	3
68	51	3
71	57	3
74	63	3
77	69	3
80	75	3
83	81	3

a	2a – 85	bug
45	5	non
48	11	11
51	17	non
54	23	23
57	29	29
60	35	7
63	41	41
66	47	47
69	53	53
72	59	59
75	65	13
78	71	71
81	77	7
84	83	83

Continuons avec un nouveau tableau qui tient compte de ce premier filtre :

a	2a-b = c	b = 85 · a : c	a + b
43	1	3'655	3'698
45	5	765	810
51	17	255	306
55	25	187	242

Il existe **4 solutions : 242, 306, 810, 3'698**.

Complétons ce corrigé avec un cheminement plus direct qui m'a été soufflé par Michel Combe.
De 2ab = 85a + 85b, nous pouvons en déduire que :
$4ab - 85 \cdot 2a - 85 \cdot 2b + 85^2 = 85^2$
D'où : $(2a - 85)(2b - 85) = 85^2$
Si nous postulons que a > b, nous retrouvons nos 4 solutions dans le tableaux ci-dessous :

2a – 85	2b – 85	a	b	a + b
85^2	1	3'655	43	3'698
$5 \cdot 17^2$	5	765	45	810
$5^2 \cdot 17$	17	255	51	306
17^2	5^2	187	55	242

16. De 23 à 2024
Postulons que les années que nous cherchons peuvent s'écrire ainsi 100a + b avec a, le nombre de centaines qui peut varier de 10 à 20 et b qui peut varier de 10 et 99 pour répondre à la question posée.

Nous comprenons que 100a + b doit être un multiple de b – 1.
Nous en déduisons que 100a + 1 doit être un multiple de b – 1 et la consigne exige que b – 1 soit un nombre premier.

En décomposant 100a + 1 en facteurs premiers, nous devons faire apparaître b – 1, et, b – 1 peut varier de 9 à 98 pour que 100a + b soit un nombre cherché.

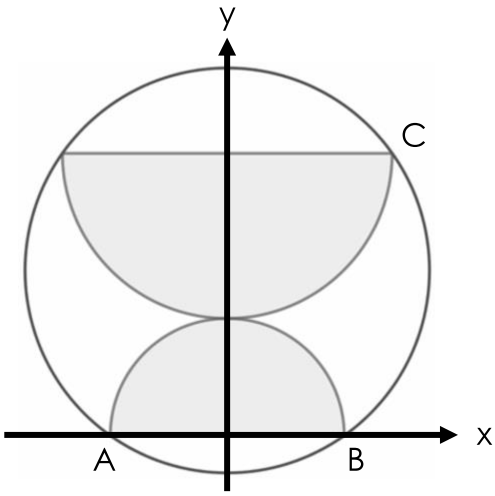
Il ne reste plus qu'à faire le travail :
- 1'001 = 7 · 11 · 13
- 1'101 = 3 · 367
- 1'201 est un nombre premier
- 1'301 est un nombre premier
- 1'401 = 3 · 467
- 1'501 = 19 · 79
- 1'601 est un nombre premier
- 1'701 = $3^5 \cdot 7$
- 1'801 est un nombre premier
- 1'901 est un nombre premier
- 2'001 = 3 · 23 · 29 (2'030 est supérieur à 2'024)

Il existe **4 solutions : 1'012, 1'014, 1'520 et 1'580**.

17. Des médailles et des coupes

Utilisons la géométrie analytique pour entrer dans cette énigme en construisant un système d'axes orthonormé comme sur la figure ci-contre. L'unité utilisée pour les graduer sera le centimètre.

Nommons r le rayon du petit-demi disque, nous en déduisons simplement que celui du grand demi-disque vaut $\sqrt{2}$ r.



Le centre de la médaille est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Déterminons l'équation de la médiatrice du segment AC.

La pente de AC vaut $\frac{\sqrt{2}r+r}{\sqrt{2}r+r}$ = 1 donc celle de la médiatrice vaut –1.

Or la médiatrice passe par le point M($\frac{\sqrt{2}r-r}{2}$; $\frac{\sqrt{2}r+r}{2}$), milieu de AC.

Nous pouvons trouver son équation : y = –x + $\sqrt{2}$ r.

La médiatrice de AB est confondue avec l'axe y, son équation est : x = 0.

Nous trouvons aisément E(0 ; $\sqrt{2}$ r), le centre de la médaille (intersection des 2 médiatrices).

Le triangle AOE, avec O l'origine du repère est rectangle. Son hypoténuse correspond au rayon de la médaille, c'est-à-dire 4 cm.

Grâce à Pythagore, nous obtenons : $r^2 + (\sqrt{2}\,r)^2 = 4^2$, d'où r = $\sqrt{\frac{16}{3}}$.

Il nous reste à calculer l'aire grisée A = $\frac{\pi\cdot\frac{16}{3}}{2} + 2\cdot\frac{\pi\cdot\frac{16}{3}}{2} = 8\pi.$

En utilisant la valeur de pi fournie, en transformant en mm^2 et en arrondissant à l'unité, nous obtenons une aire grisée de **2'513 mm^2**.

18. La numérotation cavalière

Commençons par quelques considérations :

- Un cavalier est obligé de changer de ligne lors de chaque déplacement (2 nombres consécutifs ne peuvent pas être sur la 1ère ligne),
- Un cavalier est obligé de changer de couleur de case lors de chaque déplacement (les cases d'une couleur ont toutes la même parité).

Pour minimiser, le nombre que nous lirons, nous devons faire en sorte qu'il contienne le moins de chiffres possible. Il s'agit d'utiliser un maximum de nombre inférieur à 10.
En suivant notre premier critère, la seule possibilité avec 5 nombres serait : 1, 3, 5, 7, 9. Le second critère la rejette.
Il sera uniquement possible de placer 4 nombres inférieurs à 10.

Nous pouvons minimiser le nombre cherché en plaçant un 10 dans la 1ère case.

Le 0 est, ensuite, à privilégier. Nous le retrouvons dans le 20. Or, il sera toujours préférable de placer 1 ou un nombre entre 10 et 19 compris plutôt que 20.
Nous placerons, si possible, un 1 dans la 2e case (le 11 ne peut pas être dans la 1ère ligne et le 1 permet de placer deux chiffres 1 consécutivement), un 12 dans la 3e case, puis un 15 dans la 4e case (11 et 13 ne peuvent pas être dans cette ligne, 14 ne possède pas la bonne parité).

Avec ce début de construction idéal, il nous reste 4 cases dans lesquelles nous devons placer 3 nombres inférieurs à 10 parmi ceux qui peuvent encore appartenir à cette ligne : 3, 4, 5, 6, 7, 8.
Si nous n'utilisons pas le 3, nous devrons placer 4, 6 et 8 ce qui est impossible pour des questions de parité. Le même raisonnement est valable pour le 8.
Le 3 et le 8 doivent être dans la 1ère ligne et notre début de construction nous impose de les placer dans les 5e et 6e cases.

Il nous reste deux options pour la 7e et la 8e case :

- 6 et un nombre à deux chiffres,
- un nombre à deux chiffres et 5.

La seconde option minimise le nombre cherché. Elle nous permettra également de placer tous les nombres de 1 à 15 :

	11	14	7	b	c	4	d
	a	9	2	13	6		
10	1	12	15	8	3		5

Si on souhaite placer le 18 dans la 7e case (ce qui serait idéal), il faudra placer le 16 en a ou en b et le 17 en c ou en d, ce qui est incompatible. On trouve, par contre facilement un chemin qui nous permet de placer le 20 dans la 7e case :

						17	
	11	14	7	16	19	4	
		9	2	13	6		18
10	1	12	15	8	3	20	5

On obtient ainsi la meilleure option : **101'121'583'205**.