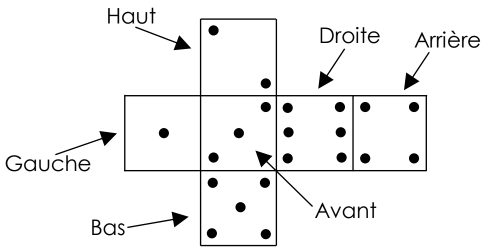
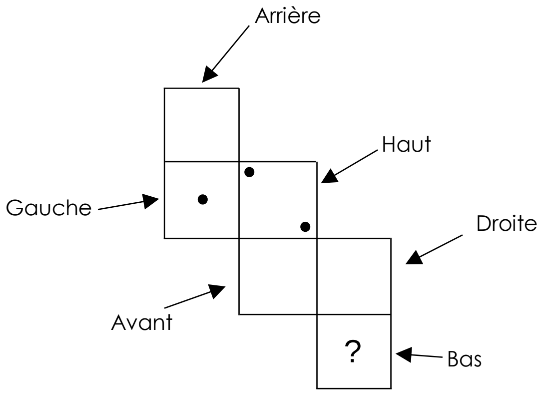
Demi – finale du 18 mars 2023

1. Les dés de Lily

Analysons les dés fournis par leur développement :



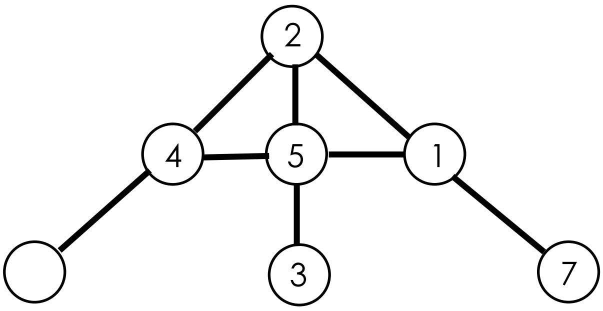


Nous constatons que la face cherchée est en bas en suivant notre raisonnement ci-dessus.
Il s'agit de la **face 5**.

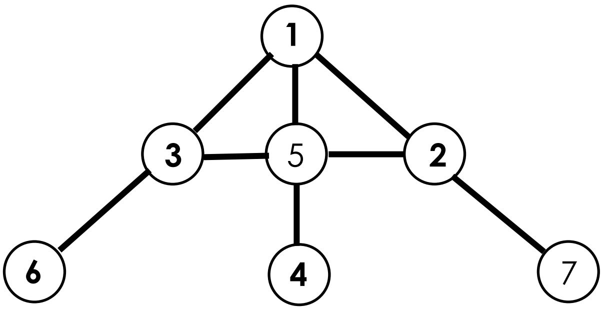
2. Les sept nombres

Les deux nombres qui complètent la ligne contenant le 7 sont obligatoirement 1 et 2.
Sinon, la somme serait supérieure à 10.

Tentons de placer 2 dans la case du haut :



C'est impossible de terminer (le 4 est déjà utilisé). Par contre, en plaçant le 1 dans la case du haut, nous obtenons la solution cherchée :



3. Cinq lettres, c’est tout !

Dans chaque ligne et dans chaque colonne, nous devons trouver un L, un A, un P, un I et un N. Il est, dès lors, possible de compléter toutes les cases grisées :

		P	I	N
	I		P	A
I		N		L
P	L		N	
A		I		P

Il est, ensuite, facile de compléter cette grille :

L	**A**	P	I	N
N	I	**L**	P	A
I	**P**	N	**A**	L
P	L	**A**	N	**I**
A	**N**	I	**L**	P

4. Un partage délicat

Donnons pour commencer 1 cm de fil à Alix pour comprendre la situation.
Bob en aura 4 cm de plus qu’Alix, c’est-à-dire 5 cm.
Carla en aura 5 cm de plus que Bob, c’est-à-dire 10 cm.
En tout, ils auront 1 + 5 + 10, c’est-à-dire 16 cm de fil.
Il reste 40 – 16, c’est-à-dire 24 cm de fil à répartir entre les trois enfants.

Pour que l’écart entre les morceaux de fil reste le même, répartissons le surplus de 24 cm équitablement entre les trois enfants. Chacun reçoit 8 cm en plus.

Alix se retrouve avec 1 + 8 = 9 cm de fil.
Bob se retrouve avec 5 + 8 = 13 cm de fil.
Carla se retrouve avec 10 + 8 = 18 cm de fil.

La longueur du fil de Bob est donc de **13 cm**.

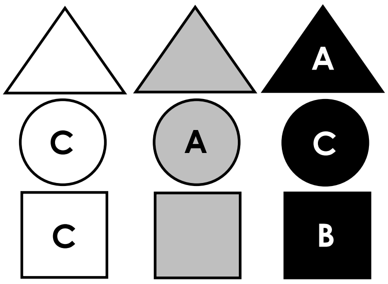
5. Les gommettes
N'oublions pas ce qui est dit en fin de consigne : chacun possède un et un seul carré.

Carla ne possède ni triangle, ni gommettes grises.
Nous en déduisons qu'elle possède la 4, la 6 et pour finir la 7 ou la 9.

Alix possède le triangle noire (la gommette 3) et une gommette ronde (il ne reste que la 5) et une gommette carrée.

Bob possède les trois couleurs. Nous sommes certains qu'il possède la gommette 9 (car la 3 et la 6 sont déjà prise). Donc Carla possède la 7 (car elle devait posséder la 7 ou la 9).

Faisons le point sur la situation :



Il en découle qu'Alix possède la 8 et donc Bob la 1 et la 2.

Carla possède **les gommettes 4, 6 et 7**.

6. Grille à partager
Il existe plusieurs pièces différentes dont la somme des nombres vaut 23 :

3	8	5	6
10	1	11	2
2	9	7	5
4	7	9	3

3	8	5	6
10	1	11	2
2	9	7	5
4	7	9	3

3	8	5	6
10	1	11	2
2	9	7	5
4	7	9	3

3	8	5	6
10	1	11	2
2	9	7	5
4	7	9	3

Dans les exemples fournis ci-dessus, seuls les 2 du centre sont compatibles. Malheureusement, il est impossible de les compléter avec deux autres parties dont la somme des nombres est égale à 23.

Après quelques essais, nous trouvons une solution :

3	8	5	6
10	1	11	2
2	9	7	5
4	7	9	3

7. La mosaïque de Lucas
Au début, nous utilisons un seul carré.
Ensuite, nous avons un rectangle de 2 sur 1, puis un carré de 2 sur 2, puis un rectangle de 4 sur 2, puis un carré de 4 sur 4. Poursuivons cette stratégie tant que la feuille de 40 sur 70 nous le permet.

Etape	Dimensions
Début	1 sur 1
1	2 sur 1
2	2 sur 2
3	4 sur 2
4	4 sur 4
5	8 sur 4
6	8 sur 8
7	16 sur 8
8	16 sur 16
9	32 sur 16
10	32 sur 32
11	64 sur 32

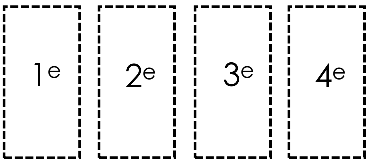
Nous pourrons faire une mosaïque de 64 carrés sur 32 carrés.

Cette mosaïque contiendra 64 x 32 = **2'048 carrés**.

8. Nombres miroirs
Si nous regardons depuis l'autre côté de la feuille :

- Le 0 reste un 0,
- Le 1 reste un 1,
- Le 2 reste un 2,
- Le 3 ne donne plus un chiffre (impossible de mettre 3 dans ce nombre),
- Le 4 ne donne plus un chiffre (impossible de mettre 4 dans ce nombre),
- Le 5 reste un 5,
- Le 6 devient un 9,
- Le 7 ne donne plus un chiffre (impossible de mettre 7 dans ce nombre),
- Le 8 reste un 8,
- Le 9 devient un 6.

Précisons que si nous regardons ce nombre à l'envers :



- Le 1^{e} chiffre devient le 4^{e} et le 4^{e} devient le 1^{e},
- Le 2^{e} chiffre devient le 3^{e} et le 3^{e} devient le 2^{e}.

Max a pu écrire un 0 (1, 2, 5 ou 8) en 2^e position.
Dans ce cas-là, Malia verra un 0 (1, 2, 5 ou 8) en 3^e position.
Cela signifie que Max a forcément dû écrire un 0 (1, 2, 5 ou 8) en 3^e position.
Et donc Malia verra un 0 (1, 2, 5 ou 8) en 2^e position (tout fonctionne).
Donc Max a pu écrire : _ 0 0 _, _ 1 1 _, _ 2 2 _, _ 5 5 _ ou _ 8 8 _.

Max a pu écrire un 6 en 2^e position.
Dans ce cas-là, Malia verra un 9 en 3^e position.
Cela signifie que Max a forcément dû écrire un 9 en 3^e position.
Et donc Malia verra un 6 en 2^e position (tout fonctionne).
Donc Max a pu écrire : _ 6 9 _.
De même, Max a pu écrire : _ 9 6 _

Le même raisonnement fonctionne pour le 1^e et le 4^e chiffre à un détail près : le 1^e chiffre ne peut pas valoir 0 sinon nous n'avons pas un nombre à 4 chiffres.

Nous avons tout en main pour lister les nombres miroirs entre 1'000 et 2'023 : 1001, 1111, 1221, 1551, 1691, 1881, 1961, 2002.

Max peut taper **8 nombres** différents.

9. Les sept jetons

Nous devons séparer ces jetons en 2 groupes.
Dans chaque groupe, nous multiplions ensuite les nombres entre eux.
L'objectif est que les 2 résultats obtenus soient le plus proche possible.

Il est impossible d'obtenir le même résultat car ce résultat est un nombre pair pour une groupe (groupe contenant le 2) et impair pour l'autre groupe.

Voici la meilleure manière de grouper ces jetons :

- 2, 3, 7, 17 : le résultat sera de 714
- 5, 11, 13 : le résultat sera de 715

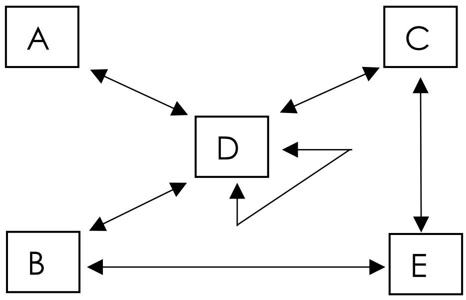
Précisons qu'en multipliant ces 7 nombres entre eux, nous obtenons 510'510. Ceci est un peu supérieur à 490'000, c'est-à-dire à 700 x 700. Le produit cherché devait être dans chaque groupe un peu supérieur à 700 pour tenter minimiser l'écart.

Pour répondre à la question, il nous suffit d'additionner les 2 résultats trouvé. Cette somme vaut **1'429**.

10. Le cavalier
Une méthode efficace mais un peu sauvage consiste à effectuer des essais. Nous pouvons tenter d'ajouter des cases non utilisées à l'aide du questionnement suivant :
Si je passe directement d'une case x à une case y (en 1 étape), est-il possible d'y arriver en passant par a et b qui ne serait pas utilisés (en 3 étapes : de x à a, de a à b, de b à y).
Notons qu'il est impossible d'ajouter une seule case au passage (de passer de x à y en 2 étapes plutôt que 1) car le cavalier change toujours de couleur lors d'un déplacement sur un échiquier.

Il est aussi possible de séparer les cases en plusieurs groupes (de 2 ou de 4 cases) et d'observer comment passer d'un groupe à l'autre :

		E	E		
	C	D	D	C	
A	B			B	A
	C	D	D	C	
		E	E		



Le but étant de passer par le maximum de cases.

En utilisant l'une ou l'autre méthode, nous arrivons à l'une des solutions optimales en cherchant à maximiser le nombre de cases traversées :

		1	10		
	9	14	7	2	
15	4			11	
	13	8	3	6	
		5	12		

Le cavalier visitera **15 cases** au maximum.

11. Intercalons !
A ce stade du concours, certains élèves qui résolvent ces énigmes ne maîtrisent pas les équations. Nous devons nous en passer pour cette correction.

Rappelons que la différence entre 2 multiples d'un nombre donné est un multiple de ce nombre donné (147 et 91 sont des multiples de 7, donc 147–91 l'est aussi).

Le nombre cherché est composé de deux chiffres. Il peut se terminer par n'importe quel chiffre de 0 à 9.

Analysons le cas où ce nombre se termine par 1 et admettons qu'il commence par le chiffre n : notre nombre est 'n 1' (il suffit de remplacer n par un chiffre pour rendre le raisonnement ci-dessous plus compréhensible).
'n 2 3 1' doit être un multiple de 'n 1'.
Or 'n 1 0 0' est un multiple de 'n 1' (il s'agit de 100 fois 'n 1').
Donc 131 doit être un multiple de 'n 1' ('n 2 3 1' – 'n 1 0 0').
Plus précisément la question posée devient 131 est-il un multiple de 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 ou 91 ? Lorsqu'on répond ''oui'', on a trouvé une solution.

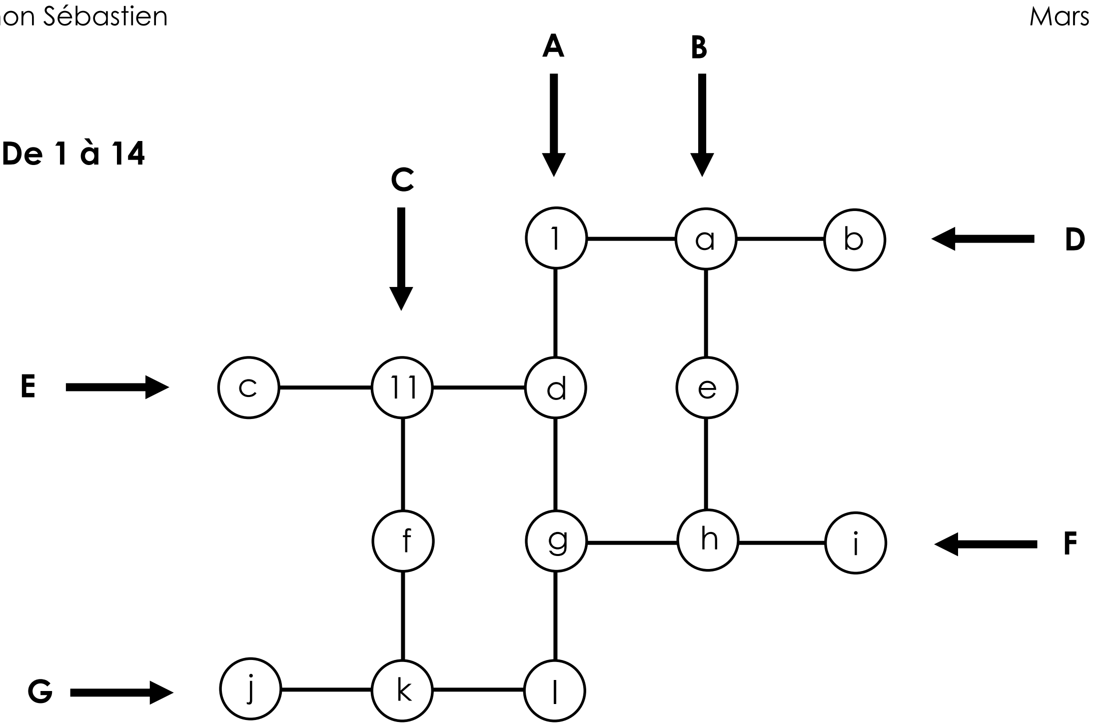
Réalisons le même raisonnement avec 4 :
'n 2 3 4' doit être un multiple de 'n 4'.
Or 'n 4 0 0' est un multiple de 'n 4'.
Donc 166 doit être un multiple de 'n 4' ('n 4 0 0' – 'n 2 3 4').

Cette démarche n'est pas très directe mais elle simplifie tout de même le problème.
Résumons cela dans le tableau ci-dessous (case grisée lorsque la réponse est ''oui'') :

	Multiple de ?								
230	10	20	30	40	50	60	70	80	90
131	11	21	31	41	51	61	71	81	91
32	12	22	32	42	52	62	72	82	92
67	13	23	33	43	53	63	73	83	93
166	14	24	34	44	54	64	74	84	94
265	15	25	35	45	55	65	75	85	95
364	16	26	36	46	56	66	76	86	96
463	17	27	37	47	57	67	77	87	97
562	18	28	38	48	58	68	78	88	98
661	19	29	39	49	59	69	79	89	99

Il existe **3 solutions : 10, 26 et 32**.

12. De 1 à 14



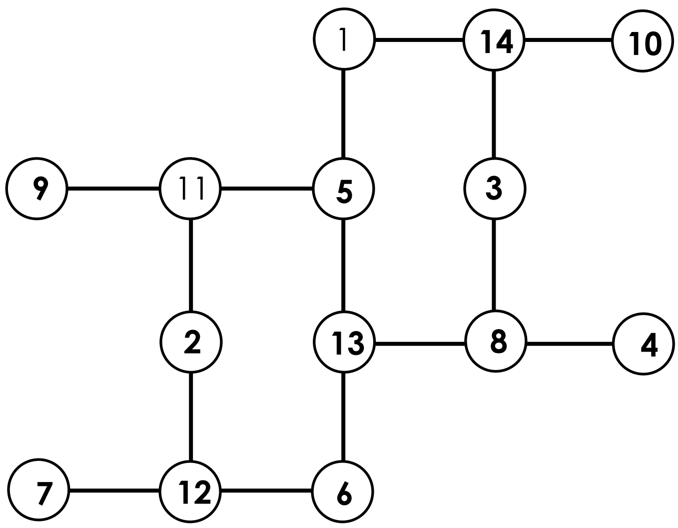
Nous devons analyser au mieux tous les cas possibles afin de déterminer une solution à ce problème.
En observant le bulletin-réponse, nous comprenons qu'il existe une unique solution à trouver.
Construisons un raisonnement étape par étape.

La ligne D nous apprend que a et b valent 10 et 14 (nous ne savons pas dans quel ordre).

La ligne E et la colonne C nous apprennent que c et d, ainsi que f et k peuvent valoir 2 et 12, ou 5 et 9, ou 6 et 8 (nous ne savons pas dans quel ordre).

Il existe 24 cas à tester. Voici un développement du premier :
Si c = 1, d = 12, f = 5 et k = 9, on comprend que l vaut 4 ou 8.
Si l = 4, j vaut 12 ce qui n'est pas possible (même valeur que d).
Si l = 8, j vaut 8 ce qui n'est pas possible (même valeur que l).

Après quelques essais nous aboutissons sur la solution suivante :



13. La chaîne de l'année

Listons les premiers multiples de 2023 :

2023	12138	22243	32358
4046	14161	24266	34381
6069	16184	26289	36404
8092	18207	28312	38427
10115	20230	30335	40460

Nous trouvons une première chaîne formée de 2023, 32358, 8092
La somme des nombres composant cette chaîne est de 42483.
Il est impossible de trouver une ''meilleure'' chaîne avec des nombres qui ne seraient pas dans la liste ci-dessus (ils seraient trop grands).
Après quelques essais, nous constatons qu'il n'existe pas de meilleur choix avec les nombres ci-dessus. La solution cherchée est donc bien **42'483**.

14. Une multiplication renversante

Rappelons-nous qu'un produit ainsi que le résultat obtenu par la multiplication des chiffres des unités des 2 facteurs se terminent de la même manière.
Nous en déduisons que 3d et 2a se terminent par le même chiffre.

d doit être pair. Si d = 2, a vaut 3 ou 8. Si d = 4, a vaut 1 ou 6. Si d = 6, a vaut 4 ou 9. Si d = 8, a vaut 2 ou 7.
Nous devons rester cohérent avec la donnée. Si d = 2 et a = 8, par exemple, nous ne trouverons pas de solutions. En effet $32 \cdot 2'999$ est inférieur à $23 \cdot 8'000$. L'égalité donnée ne sera jamais satisfaite.

Ce filtre nous laisse trois possibilités :

- d = 2 et a = 3,
- d = 4 et a = 6,
- d = 6 et a = 9.

Poursuivons de la même manière :
Les deux derniers chiffres 'cd' · 23 et 'ba' · 32 sont les mêmes.
Or $\text{'cd'} \cdot 23 = (10c + d)(20 + 3) = 2c\cdot100 + (3c + 2d)\cdot10 + 3d$.
Et $\text{'ba'} \cdot 32 = (10b + a)(30 + 2) = 3b\cdot100 + (2b + 3a)\cdot10 + 2a$.

Analysons nos trois cas possibles en nous intéressant au chiffre des dizaines :

- Si d = 2 et a = 3
  $2c\cdot100 + (3c + 2d)\cdot10 + 3d = 2c\cdot100 + (3c + 4)\cdot10 + 6$
  $3b\cdot100 + (2b + 3a)\cdot10 + 2a = 3b\cdot100 + (2b + 9)\cdot10 + 6$
  D'où 3c et 2b + 5 se terminent de la même manière.

- Si d = 4 et a = 6
  $2c\cdot100 + (3c + 2d)\cdot10 + 3d = 2c\cdot100 + (3c + 8)\cdot10 + 12$
  $3b\cdot100 + (2b + 3a)\cdot10 + 2a = 3b\cdot100 + (2b + 18)\cdot10 + 12$
  D'où 3c et 2b se terminent de la même manière.

- Si d = 6 et a = 9
  $2c \cdot 100 + (3c + 2d) \cdot 10 + 3d = 2c \cdot 100 + (3c + 12) \cdot 10 + 18$
  $3b \cdot 100 + (2b + 3a) \cdot 10 + 2a = 3b \cdot 100 + (2b + 27) \cdot 10 + 18$
  D’où 3c et 2b + 5 se terminent de la même manière.

Complétons le tableau suivant en n’oubliant pas que a, b, c et d sont 4 chiffres différents :

d	a	c	b	‘abcd’
2	3	1	4	3412
2	3	1	9	3912
2	3	5	0	3052
2	3	7	8	3872
2	3	9	1	3192
2	3	9	6	3692
4	6	0	5	6504
4	6	2	3	6324
4	6	2	8	6824

d	a	c	b	‘abcd’
4	6	8	2	6284
4	6	8	7	6784
6	9	1	4	9416
6	9	3	2	9236
6	9	3	7	9736
6	9	5	0	9056
6	9	7	3	9376
6	9	7	8	9876

23 est un nombre premier, pour que l’égalité donnée soit satisfaite, ‘abcd’ doit être un multiple de 32.

Il ne reste que 4 candidats après avoir appliqué ce filtre.
Après vérifications, nous pouvons tous les conserver.

Il existe **4 solutions : 3'872, 6'784, 9'056, 9'376**.

15. La suite de Mathias
Faisons comme si nous ne connaissions pas les suites arithmétiques et analysons ce problème.

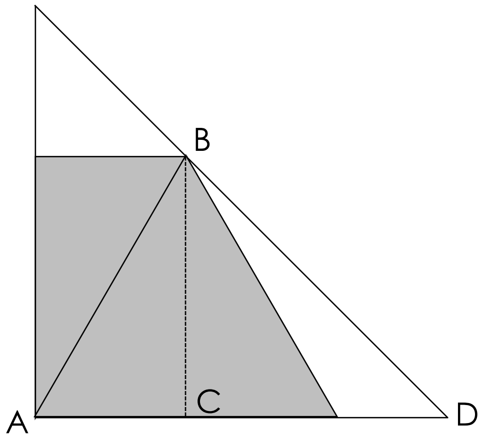
La suite à étudier est la suivante : –2'023, –2'019, –2'015, … , –7, –3, 1, 5, …

Cherchons la somme de cette suite jusqu’au terme 2'021 (c’est-à-dire le 1’012^{e} terme de la suite car –2'023 + 1'011 · 4 = 2'021). En effet, nous sommes certains de ne pas dépasser les 1'013 visés car notre somme sera négative : (1 – 3) + (5 – 7) + … + (2'021 – 2'023) = 506 · (–2) = – 1'012.

Le 1'013^{e} terme de la suite sera 2'025 et il nous permettra d’atteindre notre but : –1'012 + 2'025 = 1'013.

Lorsque Mathias s’arrête, il a écrit **1'013 nombres**.

16. Le blason
Dessinons un quart de carré pour comprendre la situation :



Il est simple d'affirmer que la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$ est de 60°, celle de l'angle $\widehat{CDB}$ est de 45°.
Utilisons nos connaissances en trigonométrie en postulant que la longueur du segment AB est de x.
Nous en déduisons les longueurs de :

- AC : $\frac{x}{2}$
- BC (isométrique à CD) : $\frac{\sqrt{3}x}{2}$

D'où l'aire de l'hexagone en fonction de x : $6 \cdot \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$

D'où également l'aire du carré en fonction de x : $4 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{x}{2}\right)^2}{2} = (2+\sqrt{3})x^2$

Nous pouvons chercher le pourcentage demandé :

$$100 \cdot \frac{(2+\sqrt{3})x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2}{(2+\sqrt{3})x^2} =$$

$$100 \cdot \frac{4-\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = 100 \cdot \frac{(4-\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} = 100 \cdot \frac{22-12\sqrt{3}}{4} = 50 \cdot (11-6\sqrt{3})$$

En utilisant la valeur fournie pour √3, nous trouvons **30,4 %.**

17. Le calcul d'Al Ambiqué
Nous nommerons la racine cherchée dans cette énigme x et nous remplacerons le nombre 23 · 44'484 par n.

Cela nous permet d'écrire l'égalité suivante : $\sqrt{n+x} = x$.

Nous en déduisons que $x^2 - x - n = 0$.
Il s'agit de trouver deux nombres consécutifs a et b (a < b) tels que ab = n.
Nous pourrons alors conclure que $x^2 - x - n = (x + a)(x - b)$ et b sera la solution positive de cette équation et donc notre valeur cherchée.

Une fois la décomposition de n en facteurs premiers effectuée :
$n = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 337$,
nous trouvons les valeurs de a et b : 1'011 et 1'012.

Le résultat du calcul d'Albert est de **1'012**.

18. Les halls d'Archie
Postulons que ce hall a des dimensions de 15 sur x sur y (mesures en m).
La consigne nous permet également de savoir que :

- $xy < 666 < \frac{10'000}{15} < 667$
- $15^2 + x^2 + y^2 = 15xy$

Cette égalité nous permet de déduire que : $y = \frac{15x \pm \sqrt{221x^2 - 900}}{2}$

x	$221x^2 - 900$	Conclusion sur y	
1	– 679	Pas de valeur de y possible	
2	– 16	Pas de valeur de y possible	
3	1'089	y = 39	y = 6
4	2'636	Ce n'est pas un carré parfait : y ne sera pas entier	
5	4'625	Ce n'est pas un carré parfait : y ne sera pas entier	
6	7'056	y = 87	y = 3

Naturellement, les solutions trouvées sont symétriques. Si x vaut 87, nous trouverons un y possible qui sera 6. Mais, il n'est pas nécessaire de chercher au-delà de x = 26 car nous trouverons des solutions déjà connues ($26^2 > 666$).
Notre zone de recherche ne dépassera pas x = 26.

La première valeur de y trouvée augmentera toujours en fonction de x.
Si nous tentons avec x = 7, nous trouverons une valeur approximative de y qui sera de 104.
Or $7 \cdot 104$ est supérieur à 666. Il n'est pas utile de continuer, nous avons déjà trouvé toutes les solutions.

La deuxième valeur de y est en train de diminuer mais elle va, par la suite, augmenter pour tendre vers l'infini.
Elle atteindra à nouveau 3 lorsque x vaudra 39.
Or 39 > 26, donc il n'y a pas d'autres solutions dans notre zone de recherche.

Il nous reste à déterminer les volumes de ces halls et nous aurons trouvé les **3 solutions** : le volume du hall est de **270** m³, **1'755** m³ ou **7'830** m³.