Demi-finale suisse – 25 mars 2017

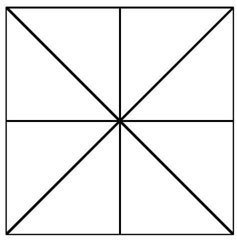
1. Petits-enfants

Lou a 3 ans.
Lorsque Lou aura 5 fois son âge, elle aura 15 ans.

Logan a 2 ans de plus que Lou. Cela ne changera jamais.
Logan aura, donc, **17 ans** lorsque Lou aura 5 fois son âge.

2. Un p'tit coin d'parasol

Réalisons un dessin :



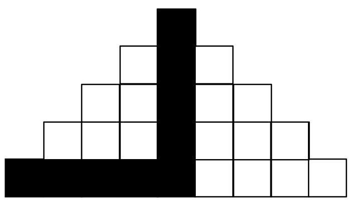
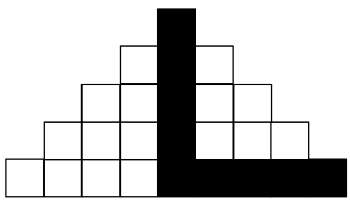
Il y a bien 3 baleines qui sont reliées du centre à chaque côté (coin y compris).

Il y a toujours une baleine qui est reliée du centre à un coin du parasol.

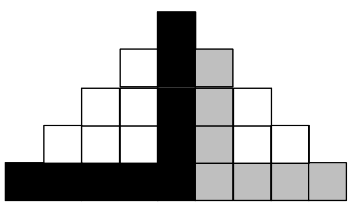
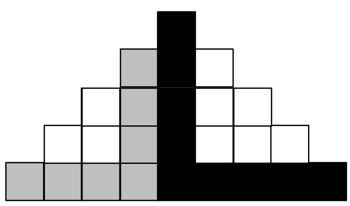
On compte **8 baleines**.

3. Du carré à la pyramide

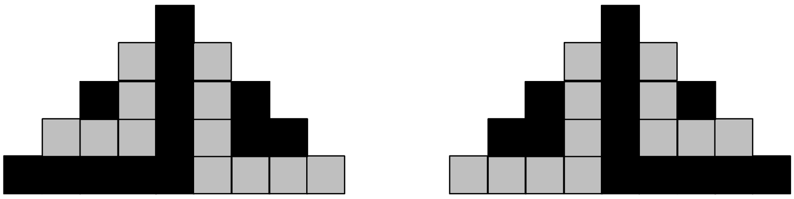
Il y a 5 pièces à placer : une très grande, une grande, une moyenne, une petite et une très petite.
Pour commencer, plaçons la très grande. Il n'existe que deux possibilités :

Pour chacun de ces deux cas de figure, il n'existe qu'une possibilité de placer la grande pièce :

Pour chacun de ces deux cas de figure, il n'existe qu'une possibilité de placer la pièce moyenne, puis la petite, puis la très petite. Cela nous permet d'obtenir les 2 solutions possibles :



4. Souvenirs

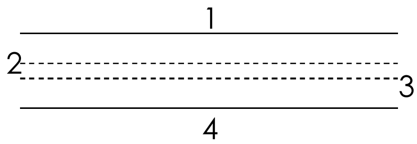
Heidi pourrait avoir 15 pièces de 1 franc. Elle pourrait, ainsi, s'acheter n'importe lequel des 11 souvenirs en payant le montant exact. Mais, n'oublions pas, qu'elle doit posséder un minimum de pièces. Il est possible d'y parvenir avec moins de pièces.

Il s'agit de prendre un maximum de pièces ayant une grande valeur. L'idéal est de posséder 2 pièces de 5 francs, 2 pièces de 2 francs et une pièce de 1 franc.

Heidi possède, au minimum, **5 pièces** dans son porte-monnaie.

5. Bonne route !

Numérotons les différents traits :



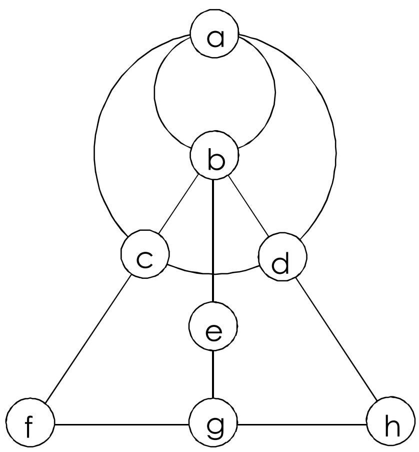
La distance entre 2 et 3 est de 1 mètre.

Tentons de minimiser la distance entre 1et 2 et celle entre 3 et 4.
Nous pourrions imaginer que la distance entre 1 et 2 est de 5 mètres, mais, il y a mieux !

Si nous affirmons que la distance entre 2 et 4 est de 5 mètres et que la distance entre 3 et 1 est de 5 mètres, nous en déduisons que la distance entre 1 et 2 est de 4 mètres et celle entre 3 et 4 est de 4 mètres.

La largeur de la route est, au minimum, de 4 + 1 + 4 = **9 mètres**.

6. 20 ou 17

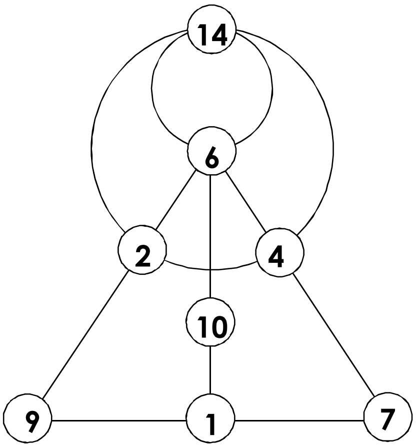


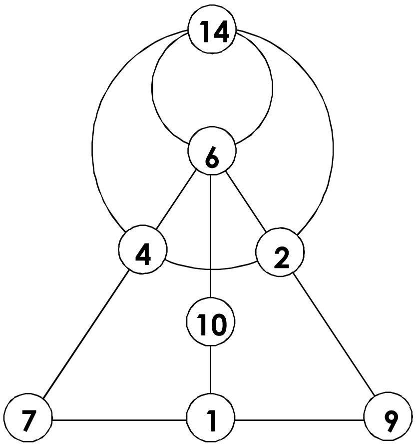
Voici un dessin du problème fourni :

Nous savons que a + b = 20,
donc a = 14 et b = 6, ou, a = 6 et b = 14.

Si nous plaçons 14 en b, nous en déduisons que :
c + f = 3, e + g = 3 et d + h = 3, simultanément.
Cela est impossible !

Nous pouvons affirmer que a = 14 et b = 6, et donc, c et d valent 4 et 2.
Il devient aisé de compléter le reste de la figure.
Nous obtenons, ainsi, 2 solutions possibles :





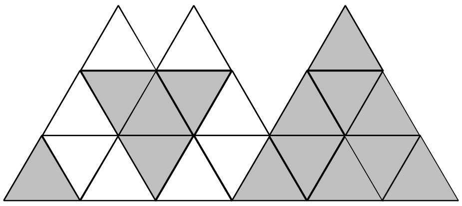
7. WAW, les 3 Suisses

Il est aisé de se convaincre que le nombre donnant la plus grande somme possible en utilisant ses 4 chiffres est 1999.
De même, il est aisé de se convaincre que le nombre donnant la plus petite somme possible en utilisant ses 4 chiffres est 2000.

Donc : (1 + 9 + 9 + 9) – (2 + 0 + 0 + 0) = 28 – 2 = **26**

8. Eiger, Mönch, Jungfrau

Il existe trois types de triangles : les petits, les moyens (formés de 4 petits) et les grands (formés de 9 petits).
Nous pouvons voir cela sur le dessin ci-dessous où un petit, un moyen et un grand ont été grisés.



Nous comptons 22 petits, 9 moyens et 3 grands.
Il y a, donc, **34 triangles**.

9. Dans les nuages

Nous pouvons résoudre ce problème à l'aide d'une équation. Etant donné qu'il est proposé à des élèves de 8H, nous préciserons qu'il est également possible de le faire par tâtonnement. Le tout est de commencer à lire la donnée par la fin.

Un paquet de cirrus contient 18 nuages.
Cela nous permet de déduire qu'il y a :
- 16 nuages dans les paquets de cumulus,
- 19 nuages dans les paquets de stratus.

S'il y a x paquets de cumulus, il y a x + 1 paquets de cirrus et x + 2 paquets de stratus.

Nous pouvons poser l'équation : $16x + 18(x + 1) + 19(x + 2) = 2017$.
En la résolvant, nous obtenons : $x = 37$.

Cela nous permet d'affirmer qu'il y a 37 paquets de cumulus, 38 paquets de cirrus et 39 paquets de stratus.

Il y a, donc, **114 paquets de nuages**.

10. Cryptarithme

Nous désirons que DIX ait la plus grande valeur possible.

Postulons, pour commencer que D = 9, I = 8 et X = 7.
Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de comprendre que UN + UN + UN + UN doit valoir 100, 200 ou 300 car, d'une part, SIX et DIX finissent par les 2 même chiffres, et, d'autre part, une somme de 4 nombres à 2 chiffres ne peut valoir 400, ou plus.
Dans notre cas S est différent de D, I et X, il doit valoir 6. Cela implique que U = 7 et N = 5.
Mais, ce n'est pas possible car X = 7 = U.

Postulons alors que D = 9, I = 8 et X = 6.
Dans ce cas, on doit avoir S = 7 et cela implique que U = 5 et N = 0. Tout fonctionne !

986 est la plus grande valeur possible de DIX.

11. Couple parfait

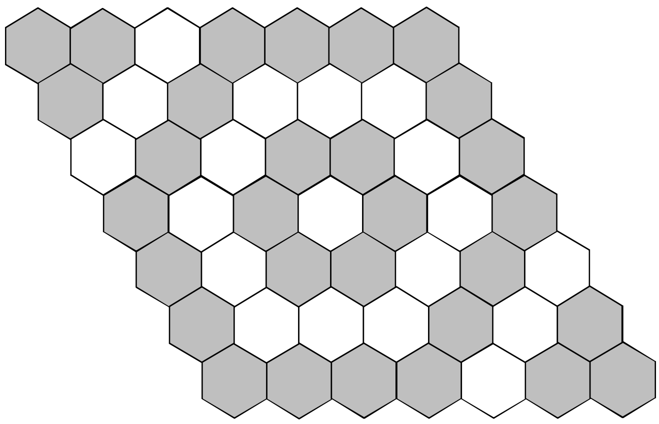
Commençons par lister les carrés parfaits commençant par le chiffre 1 et inférieur à 2017 :
100, 121, 144, 169, 196, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936.

Repérons dans cette liste ceux qui sont composés de 2 carrés parfaits placés côte à côte.
Nous avons le 16/9, 1/225, 144/4 et le 16/81.

Il existe 4 solutions : 169, 1225, 1444 et 1681.

12. Maya l'abeille

Nous pouvons colorier un maximum de 30 cases comme le montre l'image ci-contre.



Il est, par contre, plus ardu de prouver que cette option est bien l'option maximale. La beauté des symétries présentes nous sert d'indice, mais cela ne constitue pas une preuve.

13. Casino royal

Il serait possible de lister les 25 premiers coups de chaque roue et d'obtenir la solution. Nous vous laissons le faire si vous le désirez. Mais, tentons d'être plus subtil.

Si 3 lettres identiques s'affichent une fois, il n'y aura jamais d'autres lettres qui s'afficheront simultanément. C'est-à-dire que si 3 E s'affichent simultanément, il y aura toujours 3 E qui s'afficheront simultanément et jamais l'une des 25 autres lettres.

En effet, tous les 26 coups, la première roue fera un tour complet, la deuxième l'aura juste rattrapée avec ses 2 tours complets, et, la troisième s'alignera également avec ses 3 tours complets.

Imaginons que ces roues reculent, cela ne change rien au résultat. Nous trouverons la même lettre.

Si le A recule d'une lettre, nous obtenons un Z.
Si le B recule de 2 lettres, nous obtenons un Z.
Si le C recule de 3 lettres, nous obtenons un Z.

La **lettre Z** constitue, donc, la solution.

14. Echec à Matt

Posons x, le prix en francs du jeu d'échec acheté par Matt, et, x, la perte en pourcent de Matt dans cette opération. Cela nous permet de compléter le tableau de proportionnalité suivant :

Prix du jeu d'échec	x	100
Perte dans l'opération	$x - 24$	x
Prix de vente de Matt	24	$100 - x$

Nous pouvons en déduire que $x^2 = 100 (x - 24)$.

D'où : $x^2 - 100x + 2400 = 0$.

D'où : $(x - 40) (x - 60) = 0$.

D'où les deux prix possibles du jeu d'échec : 40 francs et 60 francs.

Il existe **2 solutions** : Matt a perdu **16 francs** ou **36 francs**.

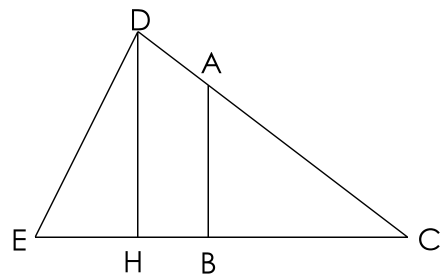
15. "What else !" le poème de M. Poe

Le premier vers du poème est de type : 1-1-1-1-1-1-1.
"Pythagore je vous adore" et "Thalès tous nous intéresse" sont de type 3-2-1-1. Cependant, ils peuvent coexister dans ce poème car ils sont arrangés de manières différentes.
Listons les cas possibles.

Type de vers	Arrangement(s) possible(s)
7	1
6-1	2
5-2	2
5-1-1	3
4-3	2
4-2-1	6
4-1-1-1	4
3-3-1	3
3-2-2	3
3-2-1-1	12
3-1-1-1-1	5
2-2-2-1	4
2-2-1-1-1	10
2-1-1-1-1-1	6
1-1-1-1-1-1-1	1

Ce poème peut contenir, au maximum, **64 vers**.

16. Le terrain du Père Ception



Nous savons que DE = 65 m, CD = 75 m et CE = 70 m.
Nous pouvons appliquer la formule de Héron afin de déterminer l'aire du triangle CDE.
Le demi-périmètre de CDE mesure 105 m.

Donc $A = \sqrt{105 \cdot 30 \cdot 35 \cdot 40}$ = 2100 m^2.

Cela nous permet de déterminer d'une part, la hauteur DH qui mesure 60 m, et, d'autre part, l'aire du triangle ABC qui vaut 1050 m^2.

Remarquons que l'hypoténuse CD du triangle rectangle CDH mesure 75 m et que la cathète connue DH mesure 60 m.
Nous pouvons affirmer que le triangle rectangle CDH, ainsi que le triangle rectangle ABC sont semblables au triangle rectangle 3-4-5.

Cela nous permet d'obtenir : $\frac{4x \cdot 3x}{2} = 1050$,

avec x le rapport d'homothétie du triangle 3-4-5 au triangle semblable ABC.

Nous en déduisons que $x = 5\sqrt{7}$, et donc que $AB = 20\sqrt{7}$.

Il ne reste plus qu'à calculer la solution : AB = **5292 cm**.

Pour en savoir plus sur la formule de Héron, rendez-vous sur le site d'Augustin Genoud : www.jeuxmath.ch. (Onglet C, problème n°27)

17. Bons de réduction

Observons quelques combinaisons "intéressantes" :

4 = 3 + 1
6 = 5 + 1 ou 6 = 3 + 2 + 1
7 = 5 + 2
9 = 8 + 1 ou 9 = 5 + 3 + 1
10 = 8 + 2 ou 10 = 5 + 3 + 2
12 = 8 + 3 + 1
13 = 8 + 5 ou 13 = 8 + 3 + 2
15 = 8 + 5 + 2
21 = 17 + 3 + 1
24 = 17 + 5 + 2

En observant les combinaisons menant aux 4, 7, 12, 15, 21 et 24, nous constatons que les chiffres 1 et 3 doivent être côte à côte, tout comme les chiffres 2 et 5. De plus, le 8 et le 17 doivent pouvoir être accolés à chacune de ces deux paires. Il n'existe que 2 schémas possibles :

Cas 1

1 ou 3		2 ou 5
3 ou 1		5 ou 2

Cas 2

1 ou 3	3 ou 1	
	2 ou 5	5 ou 2

Les deux combinaisons menant à 6 nous prouvent que le cas 1 est à exclure.

Analysons plus en détail le cas 2 que nous subdiviserons en 4 nouveaux cas :

Cas a

3	1	
	5	2

Cas b

3	1	
	2	5

Cas c

1	3	
	5	2

Cas d

1	3	
	2	5

Les combinaisons menant à 10 et 13 nous prouvent que le cas a est à exclure.
Les combinaisons menant à 9 et 10 nous prouvent que le cas b est à exclure.
Les combinaisons menant à 6 nous prouvent que le cas c est à exclure.

Il ne nous reste plus que la cas d. Nous pouvons le compléter en observant les combinaisons menant à 9 :

1	**3**	**17**
8	**2**	**5**

Notons qu'il existe **4 solutions** pour des raisons de symétrie. Voici les trois autres :

8	**2**	**5**
1	**3**	**17**

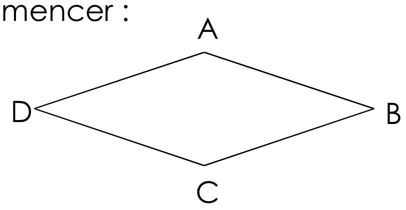
17	**3**	**1**
5	**2**	**8**

5	**2**	**8**
17	**3**	**1**

18. Un cercle équidistant

Afin d'en apprendre davantage sur ce problème, rendez-vous sur le site d'Augustin Genoud : www.jeuxmath.ch. (Onglet C, problème n°53)

Nous allons nous inspirer de cette lecture afin de résoudre ce problème.
Réalisons un croquis pour commencer :



Il existe, potentiellement 7 cercles passant à la même distance des quatre points.

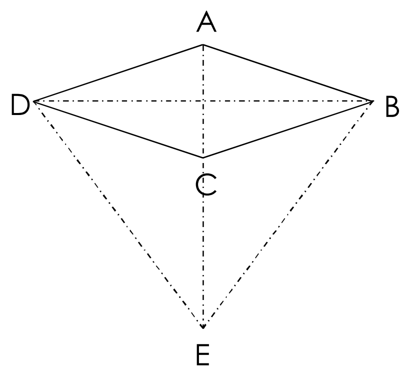
Les quatre utilisant l'intersection des médiatrices des côtés des triangles ABC, ABD, ACD et BCD et les trois utilisant l'intersection des médiatrices de AB et CD, de AC et BD, et, de AD et BC.

Pour des raisons de symétrie, les triangles ABD et BCD nous fourniront la même réponse.
Pour des raisons de symétrie, les triangles ABC et ACD nous fourniront la même réponse.
Les médiatrices de AB et CD, ainsi que celles de AD et BC sont parallèles.

Il devrait, donc, nous rester **3 solutions**.

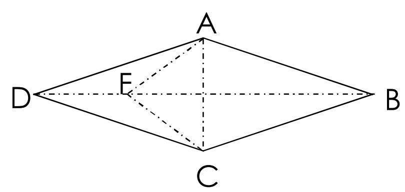
Intersection des médiatrices de AC et BD
Il s'agit de l'intersection des diagonales. Ce point se situe à 3 m de A et C, et à 9 m de B et D.
Le rayon du cercle cherché devra être de 6 m.

Intersection des médiatrices des côtés du triangle ABD
Admettons que la distance AE = 3 + x.



Nous savons que AE = DE.
Nous en déduisons que : $3 + x = \sqrt{x^2 + 81}$.
D'où : x = 12.
Donc E se situe à 15 m de A, B et D, et à 9 m de C.
Le rayon du cercle cherché devra être de 12 m.

Intersection des médiatrices des côtés du triangle ABD
Admettons que la distance DF = x.



Nous savons que AF = DF.
Nous en déduisons que : $x = \sqrt{(9 - x)^2 + 9}$.
D'où : x = 5.
Donc F se situe à 5 m de A, C et D, et à 13 m de C.
Le rayon du cercle cherché devra être de 9 m.